

DOI: 10.21122/1029-7448-2016-59-6-536-548

УДК 621.313.3

## Установившиеся режимы и статические характеристики трехфазного асинхронного двигателя при питании от однофазной сети

В. С. Маляр<sup>1)</sup>, А. В. Маляр<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Национальный университет «Львовская политехника» (Львов, Украина)

© Белорусский национальный технический университет, 2016  
Belarusian National Technical University, 2016

**Реферат.** Разработана математическая модель для исследования работы трехфазного асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором при питании обмотки статора от однофазной сети. Для создания вращающегося магнитного поля одна из фаз питается через конденсатор. Вследствие несимметрии не только переходные процессы, но и установившиеся режимы являются динамическими, поэтому в любой системе координат описываются дифференциальными уравнениями. Их исследование не может быть с достаточной адекватностью осуществлено на основе известных схем замещения и требует использования динамических параметров. В математической модели уравнения состояния контуров статора и ротора составлены в неподвижной трехфазной системе координат. Расчет установившегося режима выполняется путем решения краевой задачи, что дает возможность получить зависимости координат на периоде, не прибегая к расчету переходного процесса. Для этого исходные нелинейные дифференциальные уравнения алгебраизируются путем аппроксимации переменных кубическими сплайнами. Полученная нелинейная система алгебраических уравнений является дискретным аналогом исходной системы дифференциальных уравнений. Ее решение выполняется методом продолжения по параметру. Для расчета статических характеристик как функции некоторой переменной данная система дифференцируется аналитически, а затем интегрируется численным методом по этой переменной. В процессе интегрирования на каждом шаге или через несколько шагов производится уточнение методом Ньютона, что дает возможность осуществить интегрирование методом Эйлера за несколько шагов. Матрицы Якоби в обоих случаях совпадают. Для учета вытеснения тока в стержнях короткозамкнутого ротора каждый стержень вместе с короткозамыкающими кольцами разбивается по высоте на несколько элементов. В результате на роторе получаем несколько короткозамкнутых обмоток, эквивалентирующихся трехфазными обмотками, между которыми существуют магнитные связи.

**Ключевые слова:** трехфазный асинхронный двигатель, однофазное напряжение, конденсатор, статические характеристики, установившийся режим

**Для цитирования:** Маляр, В. С. Установившиеся режимы и статические характеристики трехфазного асинхронного двигателя при питании от однофазной сети / В. С. Маляр, А. В. Маляр // *Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ*. 2016. Т. 59, № 6. С. 536–548

---

### Адрес для переписки

Маляр Василий Сафронович  
Национальный университет «Львовская политехника»  
ул. С. Бандеры, 12,  
79013, г. Львов, Украина  
Тел.: +38 032 258-21-19  
E-mail: svmaryar@polynet.lviv.ua

### Address for correspondence

Malyar Vasyly S.  
Lviv Polytechnic National University  
12 S. Bandera str.,  
79013, Lviv, Ukraine  
Tel.: +38 032 258-21-19  
E-mail: svmaryar@polynet.lviv.ua

---

## Established Modes and Static Characteristics of Three-Phase Asynchronous Motor Powered with Single Phase Network

V. S. Malyar<sup>1)</sup>, A. V. Malyar<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Lviv Polytechnic National University (Lviv, Ukraine)

**Abstract.** A mathematical model is developed to study the operation of three-phase asynchronous motor with squirrel-cage rotor when the stator winding is powered from a single phase network. To create a rotating magnetic field one of the phases is fed through the capacitor. Due to the asymmetry of power feed not only transients, but the steady-state regimes are dynamic, so they are described by differential equations in any coordinate system. Their study cannot be carried out with sufficient adequacy on the basis of known equivalent circuits and require the use of dynamic parameters. In the mathematical model the state equations of the circuits of the stator and rotor are composed in the stationary three phase coordinate system. Calculation of the established mode is performed by solving the boundary problem that makes it possible to obtain the coordinate dependences over the period, without calculation of the transient process. In order to perform it, the original nonlinear differential equations are algebraized by approximating the variables with the use of cubic splines. The resulting nonlinear system of algebraic equations is a discrete analogue of the initial system of differential equations. It is solved by parameter continuation method. To calculate the static characteristics as a function of a certain variable, the system is analytically differentiated, and then numerically integrated over this variable. In the process of integration, Newton's refinement is performed at each step or at every few steps, making it possible to implement the integration in just a few steps using Euler's method. Jacobi matrices in both cases are the same. To account for the current displacement in the rods of the squirrel-cage rotor, each of them, along with the squirrel-cage rings, is divided in height into several elements. This results in several squirrel-cage rotor windings which are represented by three-phase windings with magnetic coupling between them.

**Keywords:** three-phase asynchronous motor, single-phase voltage, capacitor, static characteristics, established mode

**For citation:** Malyar V. S., Malyar A. V. (2016) Established Modes and Static Characteristics of Three-Phase Asynchronous Motor Powered with Single Phase Network. *Energetika. Proc. CIS Higher Educ. Inst. and Power Eng. Assoc.* 59 (6), 536–548 (in Russian)

### Введение

Трехфазные асинхронные двигатели (АД) в случае обрыва одной из фаз сети могут работать как однофазные с меньшей нагрузкой, однако после остановки не могут быть пущены в ход без принятия дополнительных мер, поскольку обмотки двух оставшихся в работе фаз при однофазном питании создают не вращающееся, а пульсирующее магнитное поле [1, 2]. В случае питания третьей фазы через последовательно включенные конденсаторы поле становится эллиптическим, и такой двигатель обладает пусковым моментом. Дополнительную обмотку с последовательно включенным конденсатором имеют также однофазные конденсаторные двигатели [3, 4]. Методы исследования АД, в которых для создания фазосдвигающих элементов используются конденсаторы, совершенствовались на протяжении многих лет в соответствии с развитием вычислительных средств и продолжают развиваться [5–11]. Однако многие вопросы расчета и анализа элек-

тромагнитных и электромеханических процессов до сих пор не решены на уровне современных требований к математическому моделированию.

АД с конденсаторами в одной фазе имеют электрическую несимметрию обмоток статора, что усложняет анализ происходящих в них электромагнитных процессов и делает невозможным непосредственное применение методов анализа симметричных асинхронных машин [2]. Качественную картину явлений рабочего процесса в однофазном асинхронном двигателе можно объяснить исходя из теории вращающихся в противоположные стороны магнитных полей [5]. Однако основанные на этой теории методы расчета, в том числе и известный в литературе метод симметричных составляющих [3, 4], имеют теоретическое обоснование только для линейных систем. Поэтому, несмотря на методологическое значение таких методов, результаты расчетов режимов и характеристик с их использованием [6] можно рассматривать лишь как приближенные. Основой большинства методов исследования процессов в АД с конденсаторами в обмотках являются адаптированные до конкретно решаемых задач схемы замещения [7, 8]. Наиболее полно математическое моделирование режимов работы АД при однофазном питании представлено в [8–10] и других публикациях этих авторов.

Для исследования режимов и характеристик АД, питаемых от однофазной сети, необходимо использовать математические модели, в которых учитываются как обусловленная насыщением нелинейность электромагнитных связей между обмотками, так и вытеснение тока в стержнях ротора. Как отмечено в [7, 11], математическое моделирование динамических режимов несимметричных АД требует использования динамических электромагнитных параметров, а учет вытеснения токов в стержнях ротора с достаточной точностью можно осуществить с применением многоконтурных электрических схем [12–15]. Однако использование схем замещения, в которых вытеснение тока в стержнях короткозамкнутого ротора и насыщения магнитопровода учитываются с помощью различных коэффициентов, неприемлемо, поскольку они зависят от динамики процесса и определить их априорно невозможно.

Несмотря на значительное количество исследований, проблему количественного анализа процессов в АД с конденсаторами в обмотках нельзя считать исчерпанной, а вопросы математического моделирования требуют принципиально новых решений, исходя из современного уровня развития вычислительных средств и численных методов анализа.

Целью статьи является разработка метода расчета установившихся режимов трехфазных АД с конденсаторами в одной обмотке с учетом насыщения магнитной цепи и вытеснения тока в короткозамкнутой обмотке ротора и на его основе алгоритма расчета статических характеристик. Сущность разработанного метода расчета изложим на примере трехфазного АД с короткозамкнутым ротором, обмотки фаз статора которого соединены звездой, а одна фаза питается через включенный последовательно конденсатор емкостью  $C$  (рис. 1).

### Уравнения электрического равновесия

Наиболее полно электромагнитные процессы в АД можно исследовать в трехфазной системе координат, однако в естественных физических осях дифференциальные уравнения (ДУ) содержат периодические взаимные индуктивности. От этих проблем можно избавиться путем перехода к неподвижной трехфазной системе координат [16], в которой обмотка статора остается непреобразованной, а вращающийся ротор заменяется заторможенным. С целью учета вытеснения тока в стержнях и насыщения магнитопровода ротора потоками рассеивания пазовая часть стержней, а также короткозамыкающие кольца разбиваются по высоте на  $k$  слоев (рис. 2). В результате получим на роторе  $k$  короткозамкнутые обмотки, которые преобразуем к трехфазным в соответствии с общепринятой методикой [2]. При этом в математической модели АД рассматриваются следующие неподвижные трехфазные обмотки (рис. 3): статора –  $A, B, C$  и  $k$  обмоток –  $a_l, b_l, c_l$  ( $l = 1, \dots, k$ ) ротора [13–16].

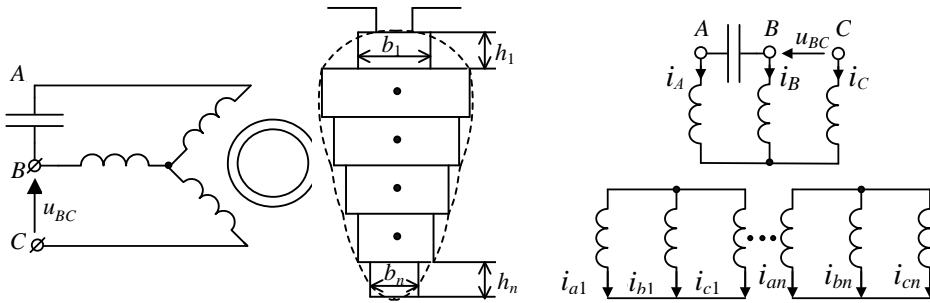


Рис. 1

Fig. 1

Рис. 2

Fig. 2

Рис. 3

Fig. 3

При условии совмещения неподвижных трехфазных осей обмотки ротора с одноименными осями обмотки статора уравнения электрического состояния контуров АД, составленные по законам Кирхгофа с учетом представления обмотки ротора  $k$  трехфазными обмотками, имеют вид [16, 17]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi_A - \psi_B) &= -r_A i_A + r_B i_B - u_c; \\ \frac{d}{dt}(\psi_B - \psi_C) &= u_{BC} - r_B i_B + r_C i_C; \\ i_A + i_B + i_C &= 0; \\ \frac{d}{dt}(\psi_{a_l} - \psi_{b_l}) &= -\alpha(\psi_{b_l} - 2\psi_{c_l} + \psi_{a_l}) - r_1 i_{a_l} + r_1 i_{b_l}; \\ \frac{d}{dt}(\psi_{b_l} - \psi_{c_l}) &= -\alpha(\psi_{c_l} - 2\psi_{a_l} + \psi_{b_l}) - r_1 i_{b_l} + r_1 i_{c_l}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 & i_{a1} + i_{b1} + i_{c1} = 0; \\
 & \quad \quad \quad \vdots \\
 & \frac{d}{dt}(\psi_{ak} - \psi_{bk}) = -\alpha(\psi_{bk} - 2\psi_{ck} + \psi_{ak}) - r_k i_{ak} + r_k i_{bk}; \\
 & \frac{d}{dt}(\psi_{bk} - \psi_{ck}) = -\alpha(\psi_{ck} - 2\psi_{ak} + \psi_{bk}) - r_k i_{bk} + r_k i_{ck}; \\
 & i_{ak} + i_{bk} + i_{ck} = 0; \\
 & \frac{du_c}{dt} = \frac{i_A}{C},
 \end{aligned}$$

где  $u_{BC} = U_m \sin(\omega_0 t - \pi/2)$  – линейное напряжение;  $U_m$  – его амплитуда;  $\omega_0$  – угловая частота напряжения;  $\psi_\zeta, i_\zeta, r_\zeta (\zeta = A, B, C, a_1, b_1, c_1, \dots, a_k, b_k, c_k)$  – потокосцепление, ток и активное сопротивление контуров АД;  $u_c$  – напряжение на конденсаторе;  $\alpha = \omega_0(1-s)/\sqrt{3}$ .

### Расчет установившегося режима при заданном скольжении

С целью сокращения изложения материала систему (1) представим одним векторным ДУ  $m$ -го порядка

$$P \frac{d\bar{y}(\bar{x})}{dt} = \bar{f}(\bar{z}(\bar{y}, \bar{x}), \bar{u}), \tag{2}$$

где

$$\bar{x} = \text{colon}(i_A, i_B, i_C, i_{a1}, i_{b1}, i_{c1}, \dots, i_{ak}, i_{bk}, i_{ck}, u_c); \quad \bar{u} = \text{colon}(0, u_{BC}, 0, \dots, 0, 0);$$

$$\bar{y} = \text{colon}(\psi_A, \psi_B, \psi_C, \psi_{a1}, \psi_{b1}, \psi_{c1}, \dots, \psi_{ak}, \psi_{bk}, \psi_{ck}, u_c); \quad \bar{z} = \Omega \bar{y} + G \bar{x};$$

$$\begin{aligned}
 P = & \begin{bmatrix} E & & & \\ & \ddots & & \\ & & E & \\ & & & 1 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Omega = \begin{bmatrix} A & & & \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ & & & B \\ & & & & 0 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} R & & & -1 \\ & r & & \\ & & \ddots & \\ & & & r \\ 1/C & & & 0 \end{bmatrix}; \\
 A = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & -2\alpha \\ -2\alpha & \alpha & \alpha \\ & & \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} -r_A & r_B & \\ & -r_B & r_C \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad r = \begin{bmatrix} -r_a & r_b & \\ & -r_b & r_c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

В установившемся режиме при периодическом возмущении  $\vec{u}(t) = \vec{u}(t+T)$  решением системы ДУ (2) являются  $T$ -периодические зависимости компонент вектора  $\vec{x}(t) = \vec{x}(t+T)$ , определить которые можно методом установления. Однако такой путь решения задачи неприемлем не только с точки зрения объема вычислений и накопления ошибок при интегрировании ДУ, но и проблем, связанных с расчетом статических характеристик, которые являются основой для решения задач оптимизации. Другой путь – получение периодических зависимостей координат путем решения краевой задачи, сущность которого вытекает из общей теории нелинейных колебаний. Для этого необходимо алгебраизировать исходную систему ДУ (2) на сетке узловых точек периода с использованием выбранных базисных функций и краевых условий.

В разработанной математической модели краевая задача решается на сетке  $N$  узловых точек периода  $T$  путем аппроксимации каждой координаты вектора  $\vec{y}$  сплайном третьего порядка [18], который для  $j$ -го участка описывается уравнением вида

$$y(t) = a_j + b_j(t_j - t) + c_j(t_j - t)^2 + d_j(t_j - t)^3, \quad (3)$$

где  $j = \overline{(1, N)}$ ;  $a_j, b_j, c_j, d_j$  – коэффициенты сплайна, соотношения между которыми определяются свойствами сплайн-функций:

$$y(t_j) = y_j = a_j; \quad (4a)$$

$$dy/dt|_{t=t_j} = -b_j. \quad (4b)$$

Исходя из непрерывности сплайна (3) и его двух производных, коэффициенты  $d_j$  можно исключить, а соотношение между остальными коэффициентами определяется уравнениями [18]:

$$b_j = \frac{a_{j-1} - a_j}{h_j} - \frac{h_j}{3}(c_{j-1} + 2c_j); \quad (5a)$$

$$\frac{3}{h_j}a_{j-1} - \left(\frac{3}{h_j} + \frac{3}{h_{j+1}}\right)a_j + \frac{3}{h_{j+1}}a_{j+1} = h_j c_{j-1} + 2(h_j + h_{j+1})c_j + h_{j+1}c_{j+1}, \quad (5b)$$

где  $h_j = t_j - t_{j-1}$  – шаг сетки.

С учетом периодических краевых условий ( $\vec{y}_j = \vec{y}_{N+j}, \vec{x}_j = \vec{x}_{N+j}$ ), образовав векторы  $\vec{A} = \text{colon}(a_1, a_N)$ ,  $\vec{B} = \text{colon}(b_1, b_N)$ ,  $\vec{C} = \text{colon}(c_1, c_N)$ , из уравнений (5) получим систему уравнений  $m$   $N$ -го порядка:

$$H_3 \bar{B} - H_4 \bar{C} = \bar{B}; \quad H_1 \bar{A} - H_2 \bar{C} = 0, \tag{6}$$

в которой в случае равномерного шага ( $h_j = h$ ) соответствующие матрицы имеют вид:

$$\begin{aligned}
 H_1 = \frac{3}{h} \times & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -2 & 1 & & \dots & & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 & \dots & & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hline & & & \dots & 1 & -2 \\ \hline 1 & & & \dots & & 1 \\ \hline \end{array}; & H_2 = h \times & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 1 & & \dots & & 1 \\ \hline 1 & 4 & 1 & \dots & & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hline & & & \dots & 1 & 4 \\ \hline 1 & & & \dots & & 1 \\ \hline \end{array}; \\
 \\
 H_3 = & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -1 & & & \dots & & 1 \\ \hline 1 & -1 & & \dots & & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hline & & & \dots & 1 & -1 \\ \hline & & & \dots & & 1 \\ \hline \end{array}; & H_4 = h \times & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \dots & & 1 \\ \hline 1 & 1 & & \dots & & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hline & & & \dots & 1 & 1 \\ \hline & & & \dots & & 1 \\ \hline \end{array}.
 \end{aligned}$$

Из (6) с учетом вытекающих из (5) равенств  $\bar{A} = \bar{Y}$ ,  $\bar{B} = -\bar{F}$  получим

$$H\bar{Y} = D\bar{F}, \tag{7}$$

в которой  $\bar{Y} = \text{colon}(\bar{y}_1, \bar{y}_N)$ ;  $\bar{F} = \text{colon}(\bar{f}_1, \bar{f}_N)$ ;  $H = H_4 H_2^{-1} P H_1$ ;  $D = -H_3$ .

Нелинейная система (7) – дискретное отображение нелинейной системы ДУ (2) и аппроксимирует ее на периоде  $T$ . Ее решением является вектор  $\bar{X} = \text{colon}(\bar{x}_1, \bar{x}_N)$ , компоненты которого – это значения вектора  $\bar{x}_j$  (токов контуров и напряжения на конденсаторе) в узлах сетки. Для его получения используется известный в математике дифференциальный метод [19]. Его алгоритм применительно к данной задаче состоит в следующем.

До вектора  $\bar{F}$  входят узловые значения вынуждающих сил – вектор  $\bar{U}$ . Умножим его на скалярный параметр  $\varepsilon$  и представим (7) в виде

$$H\bar{Y} - D\bar{Z} = D\varepsilon\bar{U}. \tag{8}$$

Дифференцируя (8) по  $\varepsilon$ , получим ДУ

$$W \frac{d\bar{X}}{d\varepsilon} = D\bar{U}, \tag{9}$$

где  $W = \left( H - D \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{Y}} \right) \frac{\partial \vec{Y}}{\partial \vec{X}} - D \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{X}}$  – матрица Якоби, которая является блочно-

диагональной, а блочные элементы определяются значениями параметров АД в  $j$ -й узловой точке:

$$\left. \frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{x}} \right|_j = G; \quad \left. \frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{y}} \right|_j = \Omega;$$

$$\left. \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \right|_j = \begin{matrix} \begin{matrix} L_{AA} & L_{AB} & L_{AC} & L_{Aa1} & L_{Ab1} & L_{Ac1} & \dots & L_{Aak} & L_{Abk} & L_{Ack} \\ L_{BA} & L_{BB} & L_{BC} & L_{Ba1} & L_{Bb1} & L_{Bc1} & \dots & L_{Bak} & L_{Bbk} & L_{Bck} \\ L_{CA} & L_{CB} & L_{CC} & L_{Ca1} & L_{Cb1} & L_{Cc1} & \dots & L_{Cak} & L_{Cbk} & L_{Cck} \\ L_{a1A} & L_{a1B} & L_{a1C} & L_{a1a1} & L_{a1b1} & L_{a1c1} & \dots & L_{a1ak} & L_{a1bk} & L_{a1ck} \\ L_{b1A} & L_{b1B} & L_{b1C} & L_{b1a1} & L_{b1b1} & L_{b1c1} & \dots & L_{b1ak} & L_{b1bk} & L_{b1ck} \\ L_{c1A} & L_{c1B} & L_{c1C} & L_{c1a1} & L_{c1b1} & L_{c1c1} & \dots & L_{c1ak} & L_{c1bk} & L_{c1ck} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{akA} & L_{akB} & L_{akC} & L_{aka1} & L_{akb1} & L_{akc1} & \dots & L_{akak} & L_{akbk} & L_{akck} \\ L_{bkA} & L_{bkB} & L_{bkC} & L_{bka1} & L_{bkb1} & L_{bkc1} & \dots & L_{bkak} & L_{bkbk} & L_{bkck} \\ L_{ckA} & L_{ckB} & L_{ckC} & L_{cka1} & L_{ckb1} & L_{ckc1} & \dots & L_{ckak} & L_{ckbk} & L_{ckck} \end{matrix} \\ \dots & & & & & & & & & & 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

Это полная матрица собственных и взаимных дифференциальных индуктивностей контуров АД, для определения которых используются нелинейные зависимости рабочего потокоцепления и потокоцеплений рассеивания контуров статора и ротора от токов [17]:

$$\Psi_{\mu} = \Psi_{\mu}(i_{\mu}); \quad \Psi_{\sigma 1} = \Psi_{\sigma 1}(i_1); \quad \Psi_{\sigma 2} = \Psi_{\sigma 2}(i_2),$$

$$\text{где } i_{\mu} = \sqrt{\frac{2}{3}(i_{\mu A}^2 + i_{\mu B}^2 + i_{\mu C}^2)}; \quad i_1 = \sqrt{\frac{2}{3}(i_A^2 + i_B^2 + i_C^2)}; \quad i_2 = \sqrt{\frac{2}{3}(i_a^2 + i_b^2 + i_c^2)}.$$

Интегрируя систему ДУ (9) по  $\epsilon$  в пределах от  $\epsilon = 0$  до  $\epsilon = 1$  при заданном скольжении и напряжении питания, получим значение вектора  $\vec{X}$ , которое уточняется методом Ньютона.

В качестве примера на рис. 4 приведены рассчитанные согласно изложенному алгоритму периодические зависимости токов фаз обмотки статора двигателя 4А160М6У3 ( $P = 15$  кВт;  $U = 230$  В;  $I = 29,9$  А;  $p_0 = 2$ ) и различные значения включенной в фазу А емкости ( $C = 375$  мкФ и  $C = 750$  мкФ). Как видно из рис. 4, при увеличении емкости конденсатора может происходить изменение порядка чередования токов фаз, что обусловлено изменением суммарного реактивного сопротивления фазы АД и конденсатора. Это подтверждается расчетом процесса пуска двигателя без нагрузки с различными значениями емкости. Как видно из рис. 5, от величины емкости зависит направление вращения АД при его пуске.



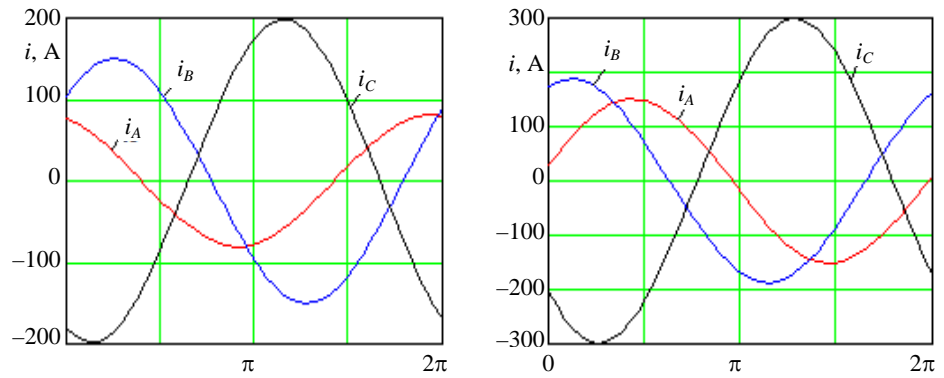


Рис. 4. Кривые изменения токов фаз асинхронного двигателя при  $s = 0,1$  и различных емкостях конденсатора

Fig. 4. Curves of change of phase currents of the asynchronous motor at  $s = 0.1$  and different capacitances of the capacitor

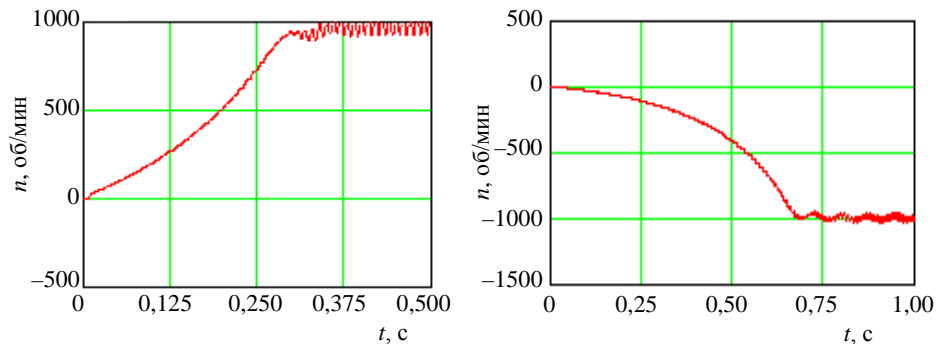


Рис. 5. Зависимости от времени скольжения  $s$  и скорости  $n$  вращения при пуске асинхронного двигателя со значениями емкости  $C$  конденсатора 375 и 750 мкФ

Fig. 5. Dependencies on the time of slip  $s$  and on the speed  $n$  of rotation at start-up of the asynchronous motor with a capacitance  $C$  of the capacitor 375 and 750  $\mu\text{f}$

### Расчет статических характеристик

Система уравнений (7) дает возможность исследовать влияние на режим работы АД изменения любого параметра  $\xi$ , который в нее входит. Для этого необходимо, полагая вектор приложенных напряжений неизменным, проинтегрировать ее по данному параметру. В результате получим

$$W \frac{d\vec{X}}{d\xi} = \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \xi}, \quad (10)$$

интегрируя которую, найдем зависимость компонент вектора  $\vec{X}$  от  $\xi$ , каждый из которых является дискретной периодической зависимостью ко-

ординат, соответствующей определенному значению параметра  $\xi$ . В соответствии с изложенным алгоритмом расчета можно найти все теоретически возможные периодические режимы с целью выбора оптимального. В частности, для расчета пусковой емкости необходимо по изложенному выше алгоритму определить зависимости координат векторов  $\vec{Y}$  и  $\vec{X}$  от емкости конденсатора при заданном скольжении  $s = 1$ , что сводится к расчету зависимости вектора  $\vec{X} = \vec{X}(C)$ , поскольку его компоненты дают возможность рассчитать электромагнитный момент [17]

$$M_e = p_0(\Psi_{\mu A}(i_{\mu B} - i_{\mu C}) + \Psi_{\mu B}(i_{\mu C} - i_{\mu A}) + \Psi_{\mu C}(i_{\mu A} - i_{\mu B}))/\sqrt{3},$$

где  $p_0$  – число пар полюсов АД;  $\Psi_{\mu A}, \Psi_{\mu B}, \Psi_{\mu C}, i_{\mu A}, i_{\mu B}, i_{\mu C}$  – проекция векторов рабочего потокосцепления  $\vec{\psi}_\mu$  и намагничивающего тока  $\vec{i}_\mu$  на оси фаз.

Задача решается путем интегрирования ДУ вида (10), в котором  $\xi = C$ . При этом правая часть уравнения (10) состоит из  $N$  векторов  $\partial \vec{z} / \partial C = D \times (0, \dots, 0, 1/C^2)^*$ . Для расчета механической характеристики  $M = M(s)$  необходимо в (10) заменить  $\xi$  на  $s$ . Таким образом, алгоритм расчета статических характеристик состоит из двух этапов: на первом рассчитывается установившийся режим при заданном значении напряжения, а на втором – собственно необходимая характеристика при неизменном значении напряжения питания.

Примеры результатов расчета зависимостей координат от величины емкости для двигателя 4А160М6У3 показаны на рис. 6.

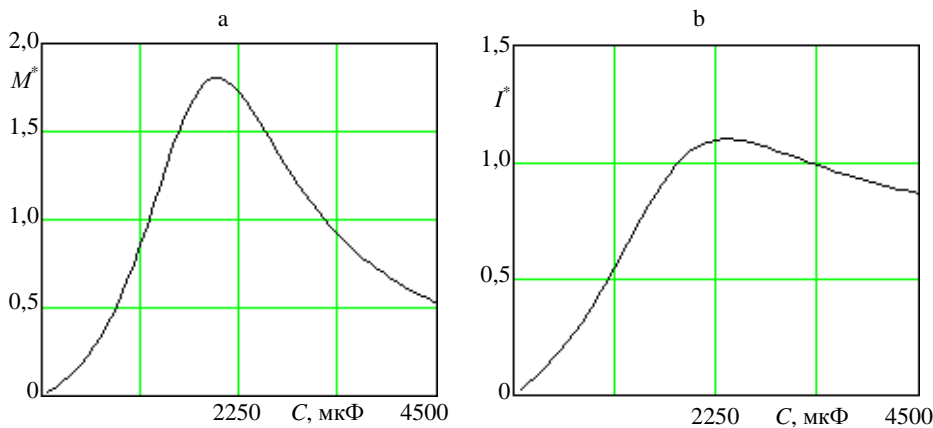


Рис. 6. Зависимости пускового электромагнитного момента (а) и действующего значения пускового тока фазы А (b) от емкости конденсатора

Fig. 6. Dependencies of starting electromagnetic torque (a) and the effective value of the starting current of phase A (b) on the capacitance of the capacitor

## ВЫВОДЫ

Разработаны метод и алгоритм расчета установившихся режимов и статических характеристик трехфазных асинхронных двигателей при питании от однофазной сети. Задача решается как краевая, что не только значительно сокращает объем вычислений по сравнению с методом установления, но и служит основой для выполнения оптимизационных расчетов, в том числе выбора необходимого значения емкости конденсаторов в фазе. Процессы в математической модели асинхронного двигателя рассматриваются в неподвижных трехфазных осях. Для учета насыщения магнитопровода используются реальные характеристики намагничивания основным магнитным потоком и потоками рассеяния, а вытеснение тока в стержнях ротора учитывается путем разбиения стержней по высоте на несколько слоев. В математической модели асинхронного двигателя используется полная матрица дифференциальных собственных и взаимных индуктивностей контуров обмоток статора и ротора, которая вычисляется как производная вектора потокосцеплений контуров по вектору токов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Брускин, Д. Э. Электрические машины и микромашины / Д. Э. Брускин, А. Е. Зорохович, В. С. Хвостов. М.: Высш. шк., 1990. 528 с.
2. Вольдек, А. И. Электрические машины / А. И. Вольдек. Л.: Энергия, 1978. 832 с.
3. Меркин, Г. Б. Конденсаторные электродвигатели для промышленности и транспорта / Г. Б. Меркин. М.; Л.: Энергия, 1966. 223 с.
4. Тазов, Г. В. Математическая модель асимметричной асинхронной машины / Г. В. Тазов, В. В. Хрущев // Электричество. 1989. № 1. С. 41–49.
5. Торопцев, Н. Д. Трехфазный асинхронный двигатель в схеме однофазного включения с конденсатором / Н. Д. Торопцев. М.: Энергоатомиздат, 1988. 95 с.
6. Мощинский, Ю. А. Математическая модель асинхронного конденсаторного двигателя по методу симметричных составляющих с использованием стандартного программного обеспечения / Ю. А. Мощинский, А. П. Петров // Электричество. 2001. № 7. С. 43–48.
7. Бешта, А. С. Определение параметров схемы замещения асинхронного двигателя при несимметричном питании статоров / А. С. Бешта, А. А. Семин // Электромеханические и энергосберегающие системы. 2014. Вып. 2. С. 10–16.
8. Беспалов, В. Я. Математическая модель асинхронного двигателя в обобщенной ортогональной системе координат / В. Я. Беспалов, Ю. А. Мощинский, А. П. Петров // Электричество. 2002. № 8. С. 33–39.
9. Беспалов, В. Я. Динамические показатели трехфазных асинхронных двигателей, включаемых в однофазную сеть / В. Я. Беспалов, Ю. А. Мощинский, А. П. Петров // Электротехника. 2000. № 1. С. 13–19.
10. Шуруб, Ю. В. Математическая модель асинхронного конденсаторного двигателя с тиристорным управлением / Ю. В. Шуруб // Техническая электродинамика. 1999. № 4. С. 52–56.
11. Лесник, В. А. Учет дифференциальных параметров при математическом моделировании несимметричных режимов работы асинхронных генераторов / В. А. Лесник, Ю. В. Шуруб // Техническая электродинамика. 2003. № 1. С. 45–48.
12. Rogers, G. An Induction Motor Model with Deep-Bar Effect and Leakage Inductance Saturation / G. Rogers, D. Beraraghana // Archiv fur Electrotechnik. 1978. Vol. 60, No 4. P. 193–201.

13. Stakhiv, P. Influence of Saturation and Skin Effect on Current Harmonic Spectrum of Asynchronous Motor Powered by Thyristor Voltage Regulator / P. Stakhiv, A. Malyar // Proceedings of the IV<sup>th</sup> International Workshop Computational Problems of Electrical Engineering, Gdynia, Poland, June 1–3, 2005. P. 58–60.
14. Фильц, Р. В. Алгоритм расчета переходных процессов в асинхронной машине с учетом насыщения и вытеснения тока / Р. В. Фильц, Е. А. Онышко, Е. Г. Плахтына // Преобразователи частоты для электропривода. Кишинев: Штиинца, 1979. С. 11–22.
15. Mathematical Modeling of Processes in Asynchronous Motors with Capacitors Connected in Series / V. Malyar [et al.] // 16<sup>th</sup> International Conference on Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE 2015). Lviv, 2015. P. 107–109.
16. Копылов, И. П. Об уравнениях асинхронной машины в различных системах координат / И. П. Копылов, Р. В. Фильц, Я. Я. Яворский // Известия вузов СССР. Электромеханика. 1986. № 3. С. 22–33.
17. Фильц, Р. В. Математические основы теории электромеханических преобразователей / Р. В. Фильц. Киев: Наукова думка, 1979. 208 с.
18. Маляр, В. С. Математическое моделирование периодических режимов работы электротехнических устройств / В. С. Маляр, А. В. Маляр // Электронное моделирование. 2005. Т. 27, № 3. С. 39–53.
19. Яковлев, М. Н. К решению систем нелинейных уравнений методом дифференцирования по параметру / М. Н. Яковлев // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4, № 1. С. 146–149.

Поступила 21.03.2016 Подписана в печать 26.05.2016 Опубликовано онлайн 29.11.2016

#### REFERENCES

1. Bruskin D. E., Zorokhovich A. E., Khvostov V. S. (1990) *Electrical Machines and Micro-machines*. Moscow, Vyshaya Shkola. 528 (in Russian).
2. Voldek A. I. (1978) *Electrical Machines*. Leningrad, Energiya. 832 (in Russian).
3. Merkin G. B. (1966) *Capacitor Electric Motor for Industry Sector and Transportation*. Moscow. Leningrad, Energiya. 223 (in Russian).
4. Tazov G. V., Khrushev V. V. (1989) Mathematical Model of Asymmetrical Asynchronous Motor. *Elektrichestvo* [Electricity], (1), 41–49 (in Russian).
5. Toroptsev N. D. (1988) *Three-Phase Asynchronous Motor in the Scheme of a Single-Phase Inclusion through the Capacitor*. Moscow, Energoatomizdat. 95 (in Russian).
6. Moshchinskiy Yu. A., Petrov A. P. (2001) Mathematical Model of Asynchronous Capacitor Motor Using Symmetrical Component Method in Standard Software. *Elektrichestvo* [Electricity], (7), 43–48 (in Russian).
7. Beshta A. S., Semin A. A. (2014) Determining Parameters of Equivalent Circuit of Asynchronous Machine with Asymmetrical Single-Phase Power Supply of the Stator. *Elektromekhanicheskie i Energosberigayushchie Sistemy* [Electromechanical and Energy Saving Systems], (2), 10–16 (in Russian).
8. Bespalov V. Ya., Moshchinskiy Yu. A., Petrov A. P. (2002) A Mathematical Model of an Asynchronous Motor in a Generalized Orthogonal System of Coordinates. *Elektrichestvo* [Electricity], (8), 33–39. (in Russian).
9. Bespalov V. Ya., Moshchinskiy Yu. A., Petrov A. P. (2000) Dynamic Indices of Three-Phase Asynchronous Motor with Single-Phase Power Supply. *Elektrotehnika* [Electrical Engineering], (1), 13–19 (in Russian).
10. Shurub Yu. V. (1999) Mathematical Model of Asynchronous Capacitor Motor with Thyristor Control. *Tekhnichna Elektrodinamika* [Technical Electrodynamics], (4), 52–56 (in Russian).
11. Lesnik V. A., Shurub Yu. V. (2003) Accounting of Differential Parameters of Mathematical Simulation of Asymmetrical Modes of Asynchronous Generators. *Tekhnicheskaya Elektrodinamika* [Technical Electrodynamics], (1), 45–48 (in Russian).

12. Rogers G., Beraraghana D. (1978) An Induction Motor Model with Deep-Bar Effect and Leakage Inductance Saturation. *Arhiv fur Electrotechnik*, 60 (4), 193–201.
13. Stakhiv P., Malyar A. (2005) Influence of Saturation and Skin Effect on Current Harmonic Spectrum of Asynchronous Motor Powered by Thyristor Voltage Regulator. *Proceedings of the IV<sup>th</sup> International Workshop Computational Problems of Electrical Engineering, Gdynia, Poland, June 1–3, 2005*. Gdynia, 58–60.
14. Filts R.V., Onyshko E. A., Plakhtyna E. G. (1979) Algorithm of Designing Transient Processes in Asynchronous Motor Taking Into Account Saturation and Current Displacement. *Frequency Converters for Electric Drive*. Kishinev, Shtiyntsa Publ., 11–22 (in Russian).
15. Malyar V., Hamola O., Maday V., Vasylchyshyn I. (2015) Mathematical Modeling of Processes in Asynchronous Motors with Capacitors Connected in Series. *16<sup>th</sup> International Conference on Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE 2015)*. Lviv, 107–109. DOI: 10.1109/CPEE.2015.7333350.
16. Kopylov I. P., Filts R. V., Yavorskyi Ya. Ya. (1986) On Equations of Asynchronous Motor in Various Coordinate Systems. *Izvestiya Vuzov SSSR: Electromekhanika* [Proceedings of the Higher Educational Institutions of the USSR. Electromechanics], (3), 22–33 (in Russian).
17. Filts R. V. (1979) *Mathematical Foundations of the Theory of Electromechanical Transducers*. Kiev, Naukova Dumka. 208 (in Russian).
18. Malyar V. S., Malyar A. V. (2005) Mathematical Simulation of Periodic Modes of Functioning of Electrotechnical Appliances. *Electronoe Modelirovanie* [Electronic Modeling], 27 (3), 39–53 (in Russian).
19. Yakovlev M. N. (1964) Towards the Solution of the Systems of Non-Linear Equations by Means of Differentiating by Parameter. *Zhurnal Vychislitel'noy Matematiki i Matematicheskoy Fiziiki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 4 (1), 146–149 (in Russian).

Received: 21 March 2016

Accepted: 26 May 2016

Published online: 29 November 2016