

## РАСЧЕТ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЛИСТАХ И ПЛИТАХ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ, С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Докт. техн. наук, проф. ГЕРАСИМОВИЧ А. Н.

*Белорусский национальный технический университет*

Канд. техн. наук ГЕРАСИМОВИЧ Д. А.

*ООО «Электротехническая компания “Экнис”»*

Инж. КОЗИК А. М.

*Пинские электрические сети РУП «Брестэнерго»*

В различных электроустановках на большие токи применяются металлические конструкции в виде перегородок и ограждений из листов, плит, щитов и т. п. В них могут иметь место значительные величины мощности потерь, недопустимый нагрев и вибрация, вызванные вихревыми токами, которые наводятся электромагнитными полями рассеяния. Эти явления влияют на надежность и экономичность установки, а также на ее термическую и динамическую стойкость. Поэтому важна разработка методов количественной оценки отмеченных явлений, которые основываются на решении классической задачи анализа электромагнитных процессов в проводящих средах, расположенных в неоднородных магнитных полях переменных токов. Анализ таких процессов проводят экспериментально, аналитически или численно-аналитически [1–4]. Следует отметить, что указанные методы являются частными. Они ориентированы на определенный круг задач с заданными граничными условиями и заданным расположением проводящей среды относительно источника поля.

Решение задачи расчета электромагнитного поля в проводящих средах, напоминающих листы, плиты, щиты и так далее, рассмотрим на примере рис. 1. Плита с изотропными однородными электромагнитными свойствами расположена в неоднородном переменном магнитном поле источника. Принимаются известными параметры этого поля в любой точке пространства при отсутствии проводящей среды. Геометрические размеры плиты (длина  $l$  и ширина  $h$ ) всегда такие, что намного превышают ее толщину  $\delta$  и глубину проникновения электромагнитной волны. Эти условия позволяют при решении задачи, из-за незначительного влияния, исключить из рассмотрения диффузию в плиту электромагнитного поля через ее узкие грани и не рассматривать электромагнитные процессы вблизи краев плиты.

Поле (рис. 2) в среде I, т. е. над и под проводящей средой II, является результирующим, создаваемым источником и вихревыми токами среды II. Поле в плите обусловлено вихревыми токами. Так как вихревые токи вызваны магнитными потоками, пронизывающими сечение плиты, при определении их величин и других параметров поля простые соотношения полу-

чаются при использовании в решении задачи магнитного векторного потенциала. В технических системах токи источника поля и вихревые токи являются замкнутыми. Это позволяет однозначно определять величины их магнитных векторных потенциалов, так как для таких случаев условие однозначности  $\text{div} \vec{A} = 0$  (калибровка Кулона) выполняется автоматически [5]. Обозначим комплексную величину магнитного векторного потенциала источника  $\vec{A}_I(x, y, z)$ , а вихревых токов —  $\vec{A}_B(x, y, z)$ . Тогда результирующий потенциал в среде I при  $x \in (0, h)$ ,  $y \in (0, l)$ ,  $z \in (\delta, \infty)$  и  $z \in (-\infty, 0)$  будет:

$$\vec{A}_I(x, y, z) = \vec{A}_I(x, y, z) + \vec{A}_{IB}(x, y, z), \quad (1)$$

а в среде II —

$$\vec{A}_{II}(x, y, z) = \vec{A}_{2B}(x, y, z). \quad (2)$$

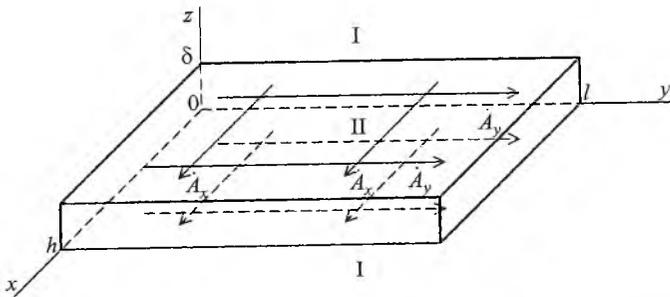


Рис. 1. Геометрическая модель листа в неоднородном магнитном поле

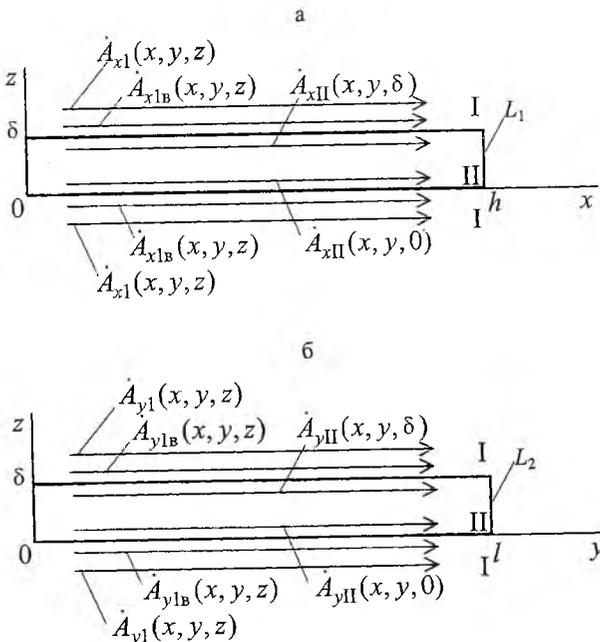


Рис. 2. Векторный потенциал источника и вихревых токов на поверхностях плоскостей сечений листа  $xOz$  (а) и  $yOz$  (б)

При этом вектор  $\vec{A}_1(x, y, z)$  содержит все три проекции  $\vec{A}_{x1}(x, y, z)$ ,  $\vec{A}_{y1}(x, y, z)$  и  $\vec{A}_{z1}(x, y, z)$ , а векторам  $\vec{A}_{1в}(x, y, z)$  и  $\vec{A}_{2в}(x, y, z)$  присущи только тангенциальные составляющие к поверхностям плиты. Через циркуляцию  $\vec{A}_{хп}(x, y, z)$  и  $\vec{A}_{yп}(x, y, z)$  по соответствующим контурам  $L_1$  и  $L_2$  определяются величины проекций магнитных потоков в сечениях плиты.

Электромагнитное состояние среды в неоднородном магнитном поле для установившегося режима определяется дифференциальным уравнением относительно комплексной амплитуды магнитного векторного потенциала  $\vec{A}(x, y, z)$  [5, 6]

$$\Delta \vec{A}(x, y, z) - \alpha^2 \vec{A}(x, y, z) = 0, \quad (3)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа;

для среды I:  $\vec{A}(x, y, z) = \vec{A}_I(x, y, z)$ ,  $\alpha_1^2 = -\omega^2 \mu_1 \epsilon_1$ ,  $\mu_1 = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Ом·с/м,  $\epsilon_1 = \epsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 4\pi} \cdot 10^{-9}$  с/(Ом·м) – диэлектрическая проницаемость;

для среды II:  $\vec{A}(x, y, z) = \vec{A}_{II}(x, y, z)$ ,  $\alpha_{II}^2 = j\omega\gamma_2\mu_2$ ,  $\gamma_2$  – электропроводность среды;  $\mu_2$  – магнитная проницаемость;  $\omega$  – круговая частота.

При исследовании поля в плите полагаем известными тангенциальные к ней составляющие векторного потенциала и магнитной индукции  $\vec{B}(x, y, z)$  на границах раздела сред I и II и их зависимости от координат  $x$  и  $y$ . Разложим эти зависимости в двойной косинусный ряд Фурье [7] по пространственным координатам с дополнением зависимостей потенциала и индукции до четных функций, т. е.:

$$\vec{A}_i(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \vec{A}_{mi}^{k,m}(z) \cos(k\omega_x x) \cos(m\omega_y y), \quad z = 0, \delta; \quad (a)$$

$$\vec{B}_i(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \vec{B}_{mi}^{k,m}(z) \cos(k\omega_x x) \cos(m\omega_y y), \quad z = 0, \delta, \quad (б)$$

где  $i = I, II$ ,  $\omega_x = \pi/h$ ,  $\omega_y = \pi/l$ ;  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  – пространственные частоты разложения по соответствующим координатам;  $\vec{A}_{mi}^{k,m}$ ,  $\vec{B}_{mi}^{k,m}$  – комплексные амплитуды  $(k, m)$ -х гармоник пространственного разложения соответствующих функций.

Теперь расчет электромагнитного состояния можно проводить методом наложения результатов диффузии поля в среды I и II от каждой гармоники. С учетом (4) уравнение (3) для проекций векторного потенциала среды II примет вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}_{mxII}^{k,m}(z)}{\partial z^2} - P_{II}^{k,m} \vec{A}_{mxII}^{k,m}(z) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}_{myII}^{k,m}(z)}{\partial z^2} - P_{II}^{k,m} \vec{A}_{myII}^{k,m}(z) = 0, \quad (5)$$

где  $p_{\text{II}}^{k,m} = \sqrt{\alpha_{\text{II}}^2 + (k\omega_x)^2 + (m\omega_y)^2}$ .

Для среды I уравнение (3) разрешается только относительно потенциала реакции вихревых токов (поле от источника считается известным):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{A}_{\text{mxIв}}^{k,m}(z)}{\partial z^2} - p_1^{k,m} \dot{A}_{\text{mxIв}}^{k,m}(z) &= 0; \\ \frac{\partial^2 \dot{A}_{\text{myIв}}^{k,m}(z)}{\partial z^2} - p_1^{k,m} \dot{A}_{\text{myIв}}^{k,m}(z) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $p_1^{k,m} = \sqrt{(k\omega_x)^2 + (m\omega_y)^2 + \alpha_1^2}$ .

Уравнения (5), (6) формально определяют распределение магнитного потенциала в рассматриваемых средах с безграничными шириной и длиной. Их решение покажем для проекции вектора  $\dot{A}_{\text{mx}}^{k,m}(z)$ . Изменение проекции  $\dot{A}_{\text{mxII}}^{k,m}(z)$  в проводящей плите по ее толщине определяется выражением [8]:

$$\dot{A}_{\text{mxII}}^{k,m}(z) = \dot{A}_{\text{mxII}}^{k,m}(0) \frac{\text{sh}(p_{\text{II}}^{k,m}(\delta - z))}{\text{sh}(p_{\text{II}}^{k,m}\delta)} + \dot{A}_{\text{mxII}}^{k,m}(\delta) \frac{\text{sh}(p_{\text{II}}^{k,m}z)}{\text{sh}(p_{\text{II}}^{k,m}\delta)}; \quad z \in (0, \delta), \quad (7)$$

где  $\dot{A}_{\text{mxII}}^{k,m}(0)$ ,  $\dot{A}_{\text{mxII}}^{k,m}(\delta)$  — неизвестные значения магнитного векторного потенциала вихревых токов на нижней и верхней поверхностях плиты.

Для воздуха решение (6) относительно вихревой составляющей потенциала определяется выражениями:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{\text{mxIв}}^{k,m}(z) &= \dot{A}_{\text{mxIв}}^{k,m}(0) \exp(p_1^{k,m}z), \quad z \in (-\infty, 0); \\ \dot{A}_{\text{mxIв}}^{k,m}(z) &= \dot{A}_{\text{mxIв}}^{k,m}(\delta) \exp(p_1^{k,m}(\delta - z)), \quad z \in (\delta, +\infty), \end{aligned} \quad (8)$$

а  $(k, m)$ -я гармоника результирующего векторного потенциала в воздухе определяется выражениями:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{\text{xI}}^{k,m}(x, y, z) &= \dot{A}_{\text{xI}}^{k,m}(x, y, z) + \\ &+ \dot{A}_{\text{mxIв}}^{k,m}(0) \exp(p_1^{k,m}z) \cos(k\omega_x x) \cos(m\omega_y y), \quad z \in (-\infty, 0); \end{aligned} \quad (a) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_{\text{xI}}^{k,m}(x, y, z) &= \dot{A}_{\text{xI}}^{k,m}(x, y, z) + \\ &+ \dot{A}_{\text{mxIв}}^{k,m}(\delta) \exp(p_1^{k,m}(\delta - z)) \cos(k\omega_x x) \cos(m\omega_y y), \quad z \in (\delta, +\infty), \end{aligned} \quad (b)$$

где  $\dot{A}_{\text{xI}}^{k,m}(x, y, z)$  — известные величины, определяемые магнитным полем источника.

Величины  $\dot{A}_{\text{mxII}}^{k,m}(0)$ ,  $\dot{A}_{\text{mxII}}^{k,m}(\delta)$ ,  $\dot{A}_{\text{mxIв}}^{k,m}(0)$  и  $\dot{A}_{\text{mxIв}}^{k,m}(\delta)$  в (7)–(9) подлежат определению. Для их нахождения составим уравнения равенства магнитного векторного потенциала на границах раздела сред для отдельных  $(k, m)$ -х гармоник, т. е.:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{\text{mxI}}^{k,m}(0) + \dot{A}_{\text{mxIв}}^{k,m}(0) &= \dot{A}_{\text{mxII}}^{k,m}(0); \\ \dot{A}_{\text{mxI}}^{k,m}(\delta) + \dot{A}_{\text{mxIв}}^{k,m}(\delta) &= \dot{A}_{\text{mxII}}^{k,m}(\delta). \end{aligned} \quad (10)$$

Два других уравнения составим на основе равенства тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля  $\vec{H}(x, y, z)$  при  $z = 0, \delta$ , определяя последние по величине магнитного векторного потенциала из условия  $\vec{H}(x, y, z) = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \vec{A}(x, y, z) = \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A}(x, y, z)$ . В результате получим:

$$\begin{aligned} \dot{B}_{myl}^{k,m}(0) + P_1^{k,m} \dot{A}_{mxd}^{k,m}(0) &= \frac{\mu_1 P_{II}^{k,m}}{\mu_2} \left( \dot{A}_{mxd}^{k,m}(\delta) \frac{1}{\text{sh}(P_{II}^{k,m} \delta)} - \dot{A}_{mxd}^{k,m}(0) \text{cth}(P_{II}^{k,m} \delta) \right); \\ \dot{B}_{myl}^{k,m}(\delta) - P_1^{k,m} \dot{A}_{mxd}^{k,m}(\delta) &= \frac{\mu_1 P_{II}^{k,m}}{\mu_2} \left( \dot{A}_{mxd}^{k,m}(\delta) \text{cth}(P_{II}^{k,m} \delta) - \dot{A}_{mxd}^{k,m}(0) \frac{1}{\text{sh}(P_{II}^{k,m} \delta)} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\dot{B}_{myl}^{k,m}(0)$ ,  $\dot{B}_{myl}^{k,m}(\delta)$  -- известные амплитуды гармоник двойного ряда Фурье индукции магнитного поля источника на границах раздела сред.

Из совместного решения уравнений (10), (11) находятся неизвестные амплитуды гармоник магнитного векторного потенциала вихревых токов на границах раздела сред:

$$\dot{A}_{mxd}^{k,m}(0) = \frac{\left( P_1^{k,m} + P_{II}^{k,m} \text{cth}(P_{II}^{k,m} \delta) \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \left( \dot{A}_{mxd}^{k,m}(0) P_1^{k,m} - \dot{B}_{myl}^{k,m}(0) \right) + \frac{P_{II}^{k,m}}{\text{sh}(P_{II}^{k,m} \delta)} \frac{\mu_1}{\mu_2} \left( \dot{A}_{mxd}^{k,m}(\delta) P_1^{k,m} + \dot{B}_{myl}^{k,m}(\delta) \right)}{\left( P_1^{k,m} + P_{II}^{k,m} \text{cth}(P_{II}^{k,m} \delta) \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2 - \left( \frac{P_{II}^{k,m}}{\text{sh}(P_{II}^{k,m} \delta)} \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2}; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_{mxd}^{k,m}(0) &= \frac{\left( P_1^{k,m} + P_{II}^{k,m} \text{cth}(P_{II}^{k,m} \delta) \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \left( \dot{A}_{mxd}^{k,m}(0) P_1^{k,m} - \dot{B}_{myl}^{k,m}(0) \right) + \frac{P_{II}^{k,m}}{\text{sh}(P_{II}^{k,m} \delta)} \frac{\mu_1}{\mu_2} \left( \dot{A}_{mxd}^{k,m}(\delta) P_1^{k,m} + \dot{B}_{myl}^{k,m}(\delta) \right)}{\left( P_1^{k,m} + P_{II}^{k,m} \text{cth}(P_{II}^{k,m} \delta) \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2 - \left( \frac{P_{II}^{k,m}}{\text{sh}(P_{II}^{k,m} \delta)} \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2} \\ &\quad - \dot{A}_{mxd}^{k,m}(0); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\dot{A}_{mxd}^{k,m}(\delta) = \frac{\left( P_1^{k,m} + P_{II}^{k,m} \text{cth}(P_{II}^{k,m} \delta) \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \left( \dot{A}_{mxd}^{k,m}(\delta) P_1^{k,m} + \dot{B}_{myl}^{k,m}(\delta) \right) + \frac{P_{II}^{k,m}}{\text{sh}(P_{II}^{k,m} \delta)} \frac{\mu_1}{\mu_2} \left( \dot{A}_{mxd}^{k,m}(0) P_1^{k,m} - \dot{B}_{myl}^{k,m}(0) \right)}{\left( P_1^{k,m} + P_{II}^{k,m} \text{cth}(P_{II}^{k,m} \delta) \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2 - \left( \frac{P_{II}^{k,m}}{\text{sh}(P_{II}^{k,m} \delta)} \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2}; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_{mxd}^{k,m}(\delta) &= \frac{\left( P_1^{k,m} + P_{II}^{k,m} \text{cth}(P_{II}^{k,m} \delta) \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \left( \dot{A}_{mxd}^{k,m}(\delta) P_1^{k,m} + \dot{B}_{myl}^{k,m}(\delta) \right) + \frac{P_{II}^{k,m}}{\text{sh}(P_{II}^{k,m} \delta)} \frac{\mu_1}{\mu_2} \left( \dot{A}_{mxd}^{k,m}(0) P_1^{k,m} - \dot{B}_{myl}^{k,m}(0) \right)}{\left( P_1^{k,m} + P_{II}^{k,m} \text{cth}(P_{II}^{k,m} \delta) \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2 - \left( \frac{P_{II}^{k,m}}{\text{sh}(P_{II}^{k,m} \delta)} \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2} \\ &\quad - \dot{A}_{mxd}^{k,m}(\delta). \end{aligned} \quad (15)$$

Выражения (12)–(15) совместно с (4), (7), (8) позволяют рассчитывать параметры электромагнитного поля в рассматриваемых областях сред I и II. При этом необходимо знать только электромагнитные свойства сред и параметры магнитного поля источника (гармоники индукции и магнитного векторного потенциала двойного ряда Фурье) на границах раздела сред.

учетом отмеченного для рассматриваемых листов и плит результирующий магнитный векторный потенциал (комплексная амплитуда) будет рассчитываться по выражению

$$\dot{A}_{x\Pi}(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \dot{A}_{mx\Pi}^{k,m}(0) \frac{\text{sh}(p_{\Pi}^{k,m}(\delta - z))}{\text{sh}(p_{\Pi}^{k,m}\delta)} + \dot{A}_{mx\Pi}^{k,m}(\delta) \frac{\text{sh}(p_{\Pi}^{k,m}z)}{\text{sh}(p_{\Pi}^{k,m}\delta)} \right) \times \quad (16)$$

$$\times \cos(k\omega_x x) \cos(m\omega_y y).$$

Так как в данном случае отсутствует потенциальная составляющая в напряженности электрического поля, ее величина определяется через значения векторного потенциала по формуле [6]

$$\dot{E}_{x\Pi}(x, y, z) = -j\omega \dot{A}_{x\Pi}(x, y, z), \quad (17)$$

напряженность магнитного поля находится соответственно

$$\dot{H}_{y\Pi}(x, y, z) = \frac{1}{\mu_2} \frac{\dot{A}_{x\Pi}(x, y, z)}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{\mu_2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \dot{A}_{mx\Pi}^{k,m}(\delta) \frac{p_{\Pi}^{k,m} \text{ch}(p_{\Pi}^{k,m}z)}{\text{sh}(p_{\Pi}^{k,m}\delta)} - \dot{A}_{mx\Pi}^{k,m}(0) \frac{p_{\Pi}^{k,m} \text{ch}(p_{\Pi}^{k,m}(\delta - z))}{\text{sh}(p_{\Pi}^{k,m}\delta)} \right) \times \quad (18)$$

$$\times \cos(k\omega_x x) \cos(m\omega_y y).$$

Аналогичные формулы получаются при решении уравнения (3) относительно составляющей векторного потенциала  $\dot{A}_y(x, y, z)$  с учетом замены в полученных выражениях индексов  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$ . Формулы (12)–(18) являются общими. Однако для преобладающего числа задач расчета поля в плите, особенно при незначительной ее толщине (лист), можно принимать  $\dot{A}_{mx1}^{k,m}(0) \approx \dot{A}_{mx1}^{k,m}(\delta) = \dot{A}_{mx1}^{k,m}$  и  $\dot{B}_{my1}^{k,m}(0) \approx \dot{B}_{my1}^{k,m}(\delta) = \dot{B}_{my1}^{k,m}$ . При таких допущениях выражения для расчета напряженностей электрического и магнитного полей приводятся к виду:

$$\dot{E}_{x\Pi}(x, y, z) = -j\omega\mu_2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\dot{A}_{mx1}^{k,m} p_{\Pi}^{k,m} \text{ch}(p_{\Pi}^{k,m}(\delta/2 - z))}{(\mu_2 p_1^{k,m} + \mu_1 p_{\Pi}^{k,m} \text{th}(p_{\Pi}^{k,m}\delta/2)) \text{sh}(p_{\Pi}^{k,m}\delta/2)} - \right. \quad (19)$$

$$\left. - \frac{\dot{B}_{my1}^{k,m} \text{sh}(p_{\Pi}^{k,m}(\delta/2 - z))}{(\mu_2 p_1^{k,m} + \mu_1 p_{\Pi}^{k,m} \text{cth}(p_{\Pi}^{k,m}\delta/2)) \text{sh}(p_{\Pi}^{k,m}\delta/2)} \right) \cos(k\omega_x x) \cos(m\omega_y y);$$

$$\dot{H}_{y\Pi}(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\dot{A}_{mx1}^{k,m} p_1^{k,m} p_{\Pi}^{k,m} \text{sh}(p_{\Pi}^{k,m}(\delta/2 - z))}{(\mu_2 p_1^{k,m} + \mu_1 p_{\Pi}^{k,m} \text{cth}(p_{\Pi}^{k,m}\delta/2)) \text{sh}(p_{\Pi}^{k,m}\delta/2)} + \right. \quad (20)$$

$$\left. + \frac{\dot{B}_{my1}^{k,m} p_{\Pi}^{k,m} \text{ch}(p_{\Pi}^{k,m}(\delta/2 - z))}{(\mu_2 p_1^{k,m} + \mu_1 p_{\Pi}^{k,m} \text{cth}(p_{\Pi}^{k,m}\delta/2)) \text{sh}(p_{\Pi}^{k,m}\delta/2)} \right) \cos(k\omega_x x) \cos(m\omega_y y),$$

формулы для расчета величин  $\dot{A}_{mx1b}^{k,m}(0)$  и  $\dot{A}_{mx1b}^{k,m}(\delta)$  будут:

$$\dot{A}_{mz1B}^{k,m}(0) = -\frac{\mu_1 p_{II}^{k,m} \dot{A}_{mz1}^{k,m} \text{th}(p_{II}^{k,m} \delta / 2)}{\mu_2 p_I^{k,m} + \mu_1 p_{II}^{k,m} \text{th}(p_{II}^{k,m} \delta / 2)} - \frac{\mu_2 \dot{B}_{my1}^{k,m}}{\mu_2 p_I^{k,m} + p_{II}^{k,m} \text{cth}(p_{II}^{k,m} \delta / 2) \mu_1}; \quad (21)$$

$$\dot{A}_{mz1B}^{k,m}(\delta) = -\frac{\mu_1 p_{II}^{k,m} \dot{A}_{mz1}^{k,m} \text{th}(p_{II}^{k,m} \delta / 2)}{\mu_2 p_I^{k,m} + \mu_1 p_{II}^{k,m} \text{th}(p_{II}^{k,m} \delta / 2)} + \frac{\mu_2 \dot{B}_{my1}^{k,m}}{\mu_2 p_I^{k,m} + p_{II}^{k,m} \text{cth}(p_{II}^{k,m} \delta / 2) \mu_1}. \quad (22)$$

В случае, если рассматривается металлоконструкция, расположенная в однородном магнитном поле ( $k = 0, m = 0, p_{II}^{k,m} = \alpha_{II}, p_I^{k,m} = \alpha_I \approx 0$  и  $\dot{H}_{my1}(x, y, 0) = \dot{H}_{my1}(x, y, \delta) = \dot{H}_{my1}$ ), получаем широко известные выражения по расчету напряженностей электромагнитного поля (с учетом переноса системы координат в середину толщины плиты, т. е.  $z = z' + \delta / 2$ ) [8, 9]:

$$\dot{E}_{mx11}(z) = -\sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\gamma_2}} \dot{H}_{my1} \frac{\text{sh}(\alpha_{II} z')}{\text{ch}(\alpha_{II} \delta / 2)}; \quad (23)$$

$$\dot{H}_{my11}(x, y, z) = \frac{\dot{B}_{my1}}{\mu_1} \frac{\text{ch}(\alpha_{II} z')}{\text{ch}(\alpha_{II} \delta / 2)} = \dot{H}_{my1} \frac{\text{ch}(\alpha_{II} z')}{\text{ch}(\alpha_{II} \delta / 2)}. \quad (24)$$

Часто для количественной оценки отдельных параметров электромагнитного поля используют вместо удельных величин усредненные значения на отдельных участках. В таких случаях в расчетные формулы подставляются значения амплитуд  $(0, m)$ -й или  $(k, 0)$ -й гармоник. К примеру, усредненное значение плотности вихревых токов на поверхности плиты  $\dot{\sigma}_{x11}^{\text{cp}}(x, y, 0)$  будет определяться по формуле

$$\dot{\sigma}_{x11}^{\text{cp}}(x, y, 0) = \gamma_2 \dot{E}_{x11}^{\text{cp}}(x, y, 0) = j\omega\gamma_2 \mu_2 \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{\dot{A}_{mz1}^{0,m} p_I^{0,m}}{\mu_2 p_I^{0,m} + \mu_1 p_{II}^{0,m} \text{th}(p_{II}^{0,m} \delta / 2)} + \frac{\dot{B}_{mz1}^{0,m}}{\mu_2 p_I^{0,m} + \mu_1 p_{II}^{0,m} \text{cth}(p_{II}^{0,m} \delta / 2)} \right) \cos(m\omega_y y). \quad (25)$$

Приведенные выражения по расчету величин параметров электромагнитного поля в рассматриваемой среде позволяют разделить их на две составляющие. Первая из них обусловлена тангенциальной величиной напряженности электрического поля источника  $\dot{E}_{mx1}(\dot{A}_{mz1})$ ,  $\dot{E}_{my1}(\dot{A}_{my1})$  или нормальной составляющей индукции  $\dot{B}_{mz1}$ . Вторая вызвана тангенциальной индукцией (напряженностью магнитного поля)  $\dot{B}_{mz1}(\dot{H}_{mx1})$ ,  $\dot{B}_{my1}(\dot{H}_{my1})$ .

При принятых допущениях и произвольной ориентации плиты по отношению к токам источника (рис. 3а) в расчетах учитываются все три составляющие индукции, а при ее расположении к току источника под углом  $90^\circ$  (рис. 3б) или в области, где отсутствует или незначительна величина индукции  $\dot{B}_{mz1}$  (рис. 3д), учитываются только составляющие, содержащие  $\dot{B}_{mx1}$  и  $\dot{B}_{my1}$ . Если ток ориентирован в направлении осей координат  $0x$  или

0у, то в расчетах учитываются соответственно составляющие  $\vec{B}_{my1}$  и  $\vec{B}_{mz1}$  (рис. 3в) или  $\vec{B}_{mx1}$  и  $\vec{B}_{mz1}$  (рис. 3г).

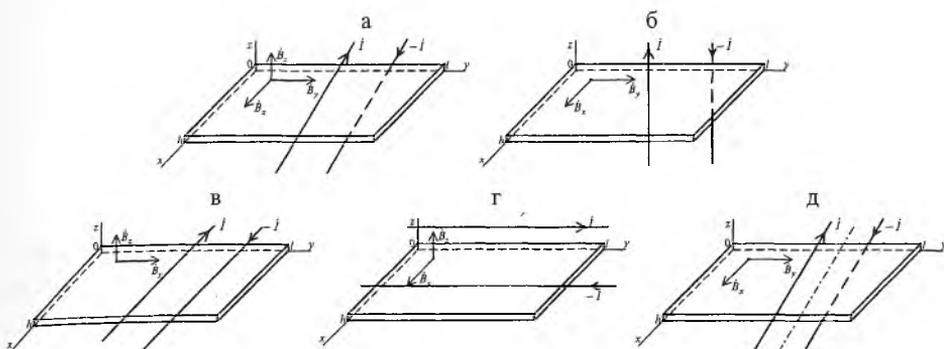


Рис. 3. Примеры расположения листа относительно токов (источников магнитного поля) и составляющие вектора магнитной индукции на его поверхностях

Таким образом, рассмотренный алгоритм по исследованию электромагнитных процессов в металлических листах и плитах, обусловленных неоднородными магнитными полями переменных токов, позволяет количественно оценить величины параметров поля по результатам разложения в двойной ряд Фурье распределений магнитного векторного потенциала и магнитной индукции источника поля на поверхностях указанных объектов.

## ВЫВОД

Предложен метод расчета электромагнитного состояния металлических листов, плит, щитов и т. п., расположенных в неоднородных магнитных полях переменных токов с использованием двойных рядов Фурье, позволяющий определять электромагнитные величины по параметрам поля источника на поверхностях исследуемых объектов и их геометрическим размерам и электромагнитным свойствам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кияницина М. С., Попова В. Ф. Потери в ферромагнитных конструкциях мощных токопроводов. – Л.: Энергия, 1972. – 112 с.
2. Кравченко А. Н., Нижник Л. П. Электродинамические расчеты в электротехнике. – Киев: Техника, 1977. – 182 с.
3. Валынская Г. Л., Холин В. Н., Цыцкян Г. Н. Об одной задаче расчета активной мощности в проводящих слоях и некоторых ее приложениях // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1974. – № 8. – С. 89–97.
4. Герасимович А. Н. Приближенные методы определения электромагнитных характеристик токоведущих систем и проводящих конструкций электроустановок: Автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.09.05 / СПбГТУ. – СПб., 1993. – 34 с.
5. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
6. Туровский Я. Техническая электродинамика / Пер. с польск. – М.: Энергия, 1974. – 448 с.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 656 с.
8. Герасимович А. Н. Техническая электродинамика. – Мн.: БГПА, 1997. – 94 с.
9. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высш. шк., 1973. – 752 с.

Представлена кафедрой  
электрических станций

Поступила 17.10.2005