## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АД С ВСТРАИВАЕМЫМ КОМБИНИРОВАННЫМ ТОРМОЗНЫМ УСТРОЙСТВОМ

## Кандидаты техн. наук, доценты СОЛЕНКОВ В. В., БРЕЛЬ В. В.

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

Как известно, точное аналитическое исследование картины электромеханического преобразования энергии в реальной электрической машине практически не удается. Этому препятствуют сложность и многообразие процессов и связей в ней. Поэтому на практике рассматривают так называемую идеализированную электрическую машину, для которой обычно принимаются следующие допущения [1]:

1) магнитная цепь ненасыщена, энергия магнитного поля сосредоточена в воздушном зазоре;

 механические потери и потери в стали пренебрежимо малы (не учитываются потери трения в подшипниках, явления гистерезиса и вихревых токов);

3) распределение МДС и индукции в пространстве синусоидально (не учитываются высшие гармоники, создаваемые обмотками реальной машины);

4) воздушный зазор равномерен;

5) энергия электростатического поля невелика (не учитывается влияние емкостей внутри обмоток и между ними);

6) активные сопротивления и индуктивности рассеяния обмоток статора, а также максимальные значения взаимоиндуктивностей между любыми обмотками статора и ротора неизменны в течение исследуемых процессов.

Несмотря на определенные упрощения, такой подход позволяет с достаточной для инженерной практики точностью описать поведение электромеханических устройств в различных режимах работы.

Основная часть исследования. Учитывая изложенное выше, перечисленные допущения использовали при математическом описании переходных процессов в асинхронных двигателях с встраиваемыми комбинированными тормозными устройствами (АД с ВКТУ) [2, 3]. Исследуемая модель АД с ВКТУ, выполненная на базе трехфазного АД с короткозамкнутым ротором, приведена на рис. 1. Пунктиром условно показано последовательное включение обмотки силового растормаживающего электромагнита с одной из фазных обмоток базового двигателя (в данном случае – с обмоткой фазы *A*). Последовательное включение обмотки электромагнита используется для исследования переходных процессов при несимметричных схемах управления силовым электромагнитом.

Короткозамкнутая обмотка ротора представлена двумя сосредоточенными обмотками, магнитные оси которых совпадают с ортогональными осями d и q, жестко связанными с ротором. Подобная замена, согласно [4], не вызывает затруднений при определении связи между расчетными параметрами, используемыми в теории установившегося режима, и параметрами, применяемыми при исследовании переходных процессов.



Рис. 1. Модель АД с ВКТУ в непреобразованной системе координат

Дополнительно было принято, что:

• фазные обмотки статора базового двигателя симметричны, т. е. имеют одинаковое число витков, одинаковые активные сопротивления, самоиндуктивности и взаимный сдвиг магнитных осей;

• питание осуществляется от сети бесконечно большой мощности (при этом процессы, происходящие в тормозном электродвигателе, не оказывают влияния на сеть);

• напряжения фаз А, В и С сети синусоидальны и симметричны, т. е.

$$u_{A} = U_{m} \cos(\omega_{o}t + \alpha_{o});$$

$$u_{B} = U_{m} \cos(\omega_{o}t + \alpha_{o} - 120^{\circ});$$

$$u_{C} = U_{m} \cos(\omega_{o}t + \alpha_{o} + 120^{\circ}),$$
(1)

где  $U_m$  – амплитудное значение фазных напряжений;  $\omega_0$  – угловая частота сети;  $\alpha_0$  – начальная фаза напряжения  $u_A$ .

С учетом принятых допущений переходные процессы в АД с ВКТУ могут быть описаны системой дифференциальных уравнений, содержащей в общем случае три типа уравнений: уравнения электрического равновесия, составленные для контуров каждой из обмоток по второму закону Кирхгофа; уравнения моментов (его называют также уравнением движения ротора или уравнением механического равновесия) и уравнения преобразования электромагнитной энергии в механическую.

Уравнения электрического равновесия для фаз *A*, *B* и *C* статора исследуемого АД с ВКТУ имеют вид:

$$u_{A} = \frac{d\Psi_{A}}{dt} + r_{1}i_{A} + u_{3};$$

$$u_{B} = \frac{d\Psi_{B}}{dt} + r_{1}i_{B};$$

$$u_{C} = \frac{d\Psi_{C}}{dt} + r_{1}i_{C}.$$

$$(2)$$

25

Соответственно для эквивалентных обмоток ротора *d* и *q* можно записать:

$$0 = \frac{d\psi_d}{dt} + r_2 i_d;$$

$$0 = \frac{d\psi_q}{dt} + r_2 i_q.$$
(3)

)

При этом потокосцепления фазных обмоток статора  $\psi_A$ ,  $\psi_B$ ,  $\psi_C$  и эквивалентных обмоток ротора  $\psi_d$  и  $\psi_q$  определяются по соотношениям:

$$\begin{split} \psi_{A} &= (L_{1} - M_{1})i_{A} + M_{12}i_{d}\cos\gamma - M_{12}i_{q}\sin\gamma; \\ \psi_{B} &= (L_{1} - M_{1})i_{B} + M_{12}i_{d}\cos(\gamma - 120^{\circ}) - M_{12}i_{q}\sin(\gamma - 120^{\circ}); \\ \psi_{C} &= (L_{1} - M_{1})i_{C} + M_{12}i_{d}\cos(\gamma + 120^{\circ}) - M_{12}i_{q}\sin(\gamma + 120^{\circ}); \\ \psi_{d} &= L_{2}i_{d} + M_{12} \Big[ i_{A}\cos\gamma + i_{B}\cos(\gamma - 120^{\circ}) + i_{C}\cos(\gamma + 120^{\circ}) \Big]; \\ \psi_{q} &= L_{2}i_{q} + M_{12} \Big[ i_{A}\sin\gamma + i_{B}\sin(\gamma - 120^{\circ}) + i_{C}\sin(\gamma + 120^{\circ}) \Big]. \end{split}$$
(4)

В выражениях (2)–(4) использованы следующие обозначения:  $r_1 = r_A = r_B = r_C$  – активное сопротивление фазы статора;  $r_2 = r_d = r_q$  – активное сопротивление одной из эквивалентных обмоток ротора;  $L_1 = L_A = L_B = L_C$  – полная индуктивность фазы статора;  $L_2 = L_d = L_q$  – полная индуктивность одной из эквивалентных обмоток ротора;  $M_1 = M_{AB} = M_{BC} = M_{CA}$  – взаимоиндуктивности между любыми двумя обмотками статора;  $M_{12} = M_{Ad} = M_{Bd} = ...$  – максимальная величина взаимоиндуктивности между любой обмоткой статора и любой эквивалентной обмоткой ротора;  $u_3$  – мгновенное значение напряжения на зажимах электромагнита; i – ток в фазной обмотке статора или в эквивалентной обмотке ротора;  $\gamma$  – угол поворота между магнитными осями обмоток статора и ротора (рис. 1).

Отметим, что в рассматриваемом случае включения растормаживающего электромагнита последовательно с одной из обмоток статора фазные напряжения, токи и потокосцепления обмоток базового электродвигателя становятся несимметричными. Однако линейные напряжения при условии сети бесконечно большой мощности остаются по-прежнему симметричными. Учитывая это, а также соотношения (2), уравнения равновесия относительно линейных напряжений  $u_{AB}$ ,  $u_{BC}$  и  $u_{CA}$  можно записать следующим образом:

$$u_{AB} = \frac{d(\Psi_{A} - \Psi_{B})}{dt} + r_{1}(i_{A} - i_{B}) + u_{3};$$

$$u_{BC} = \frac{d(\Psi_{B} - \Psi_{C})}{dt} + r_{1}(i_{B} - i_{C});$$

$$u_{CA} = \frac{d(\Psi_{C} - \Psi_{A})}{dt} + r_{1}(i_{C} - i_{A}) - u_{3},$$
(5)

где с учетом (1):

$$u_{AB} = U_m \sqrt{3} \sin(\omega_0 t + \alpha_0 + 120^\circ);$$
  

$$u_{BC} = U_m \sqrt{3} \sin(\omega_0 t + \alpha_0);$$
  

$$u_{CA} = U_m \sqrt{3} \sin(\omega_0 t + \alpha_0 - 120^\circ).$$
(6)

Уравнение моментов в соответствии с законом сохранения энергии имеет вид

$$M = \frac{J}{p} \frac{d\omega_{\rm p}}{dt} + M_{\rm c} + M_{\rm T} + M_{\rm M}(\omega_{\rm p}), \qquad (7)$$

где M – электромагнитный момент, развиваемый электродвигателем; J – суммарный момент инерции вращающихся масс, приведенный к оси вращения электродвигателя; p – число пар полюсов электродвигателя;  $\omega_p$  – угловая скорость ротора, эл. рад./с;  $M_c$  – статический момент сопротивления;  $M_{\rm T}$  – тормозной момент, возникающий в результате трения фрикционных накладок тормозного устройства (электромеханический тормоз);  $M_{\rm M}(\omega_p)$  – тормозной момент электромагнитной муфты скольжения (электромагнитный тормоз).

Характер и длительность действия тормозного момента электромеханического тормоза можно определить из следующих соображений. В отключенном состоянии, когда напряжение на обмотках электродвигателя и электромагнита отсутствует, тормозной момент согласно [5] равен

$$M_{\rm ro} = F_{\rm np} v R_{\rm cp} z, \tag{8}$$

где  $F_{np}$  – усилие возвратной пружины; v – коэффициент трения материала фрикционных накладок;  $R_{cp}$  – средний радиус поверхности трения; z – коэффициент, учитывающий конструктивные особенности тормозного устройства.

После подачи напряжения на якорь растормаживающего силового электромагнита начинает действовать тяговое усилие  $F_{\text{тяг}}$ , увеличивающееся во времени и направленное против усилия пружины. При этом величина  $M_{\text{т}}$ , пропорциональная разности  $F_{\text{пр}} - F_{\text{тяг}}$ , будет уменьшаться и станет равной нулю в момент трогания якоря, когда  $F_{\text{пр}} = F_{\text{тяг}}$ . С этого момента якорь притягивается к сердечнику электромагнита, размыкая тем самым фрикционные накладки тормоза. Следовательно, длительность действия тормозного момента на вал электродвигателя равна времени трогания  $t_{\text{тр}}$  растормаживающего электромагнита. Учитывая это, а также приняв для определенности, что со стороны нагрузки на вал действует момент сопротивления реактивного типа (типа «сухого» трения), уравнение (7) перепишем следующим образом:

$$\frac{J}{p}\frac{d\omega_{\rm p}}{dt} = M - (M_{\rm c} + M_{\rm T} lt_{\rm Tp} + M_{\rm M}(\omega_{\rm p})) \text{sign } \omega_{\rm p}, \qquad (9)$$

где  $1t_{\rm TP}$  и sign  $\omega_{\rm p}$  – функции, определяемые соотношениями:

$$1t_{\rm rp} = \begin{cases} 1 \ \text{при } t < t_{\rm rp}; \\ 0 \ \text{при } t \ge t_{\rm rp}; \end{cases}$$
(10)

sign 
$$\omega_{p} = \begin{cases} 1 \text{ при } \omega_{p} > 0; \\ -1 \text{ при } \omega_{p} < 0. \end{cases}$$
 (11)

Наконец, электромагнитный момент АД с ВКТУ в соответствии с [1] определяется по формуле

$$M = \frac{dW_{\rm 3M}}{d\gamma} p, \tag{12}$$

где  $W_{_{\rm ЭМ}}$  – полная электромагнитная энергия тормозного двигателя,

$$W_{_{3M}} = \frac{1}{2} \Big[ \Psi_A i_A + \Psi_B i_B + \Psi_C i_C + \Psi_d i_d + \Psi_q i_q \Big].$$
(13)

Подставляя (13) в (12) и учитывая при этом соотношения (4), окончательно получим:

$$M = -M_{12}p \ i_A \ i_d \sin\gamma + i_q \cos\gamma +$$
  
+
$$i_B \Big[ i_d \sin\gamma - 120^\circ + i_q \cos\gamma - 120^\circ \Big] +$$
  
+
$$i_C \Big[ i_d \sin\gamma + 120^\circ + i_q \cos\gamma + 120^\circ \Big] .$$
 (14)

Таким образом, уравнения (4)–(6), (9) и (14) образуют систему, описывающую электромеханические переходные процессы в тормозных электродвигателях в реальных фазных координатах. Используя решение системы относительно токов в обмотках, нетрудно найти потери энергии в статоре и роторе конкретного электродвигателя по соотношениям:

$$W_{s} = r_{1} \int_{0}^{t} i_{A}^{2} + i_{B}^{2} + i_{C}^{2} dt;$$

$$W_{r} = r_{2} \int_{0}^{t} i_{d}^{2} + i_{q}^{2} dt,$$
(15)

C

где  $W_s$ ,  $W_r$  – потери энергии в статоре, роторе.

Наличие периодических коэффициентов в уравнениях (4), (5) и (14) значительно усложняет решение полученной системы. Поэтому с помощью известных преобразований и формул [1, 4] перейдем к уравнениям в ортогональной системе координат  $\alpha$ ,  $\beta$ , неподвижной относительно несимметричной части АД с ВКТУ (рис. 2):



Рис. 2. Ортогональная система координат  $\alpha$ ,  $\beta$ 

$$u_{s\alpha} = \frac{d\psi_{s\alpha}}{dt} + r_{1}i_{s\alpha} + \frac{2}{3}u_{g};$$

$$(16) \qquad 0 = \frac{d\psi_{r\alpha}}{dt} + r_{2}i_{r\alpha} + \omega_{p}\psi_{r\beta};$$

$$(17) \qquad 0 = \frac{d\psi_{s\beta}}{dt} + r_{1}i_{s\beta};$$

$$M = \frac{3}{2} M_{12} p \ i_{r\alpha} i_{s\beta} - i_{s\alpha} i_{r\beta} \ , \tag{18}$$

где

$$u_{s\alpha} = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0);$$

$$u_{s\beta} = U_m \sin(\omega_0 t + \alpha_0);$$

$$(19)$$

$$\psi_{s\alpha} = (L_1 - M_1)i_{s\alpha} + M_{12}i_{r\alpha};$$

$$\psi_{s\beta} = (L_1 - M_1)i_{s\beta} + M_{12}i_{r\beta};$$

$$(20)$$

$$\Psi_{r\alpha} = L_2 i_{r\alpha} + \frac{3}{2} M_{12} i_{s\alpha};$$

$$\Psi_{r\beta} = L_2 i_{r\beta} + \frac{3}{2} M_{12} i_{s\beta}.$$
(21)

При этом величины реальных токов в обмотках электродвигателя определяются по формулам обратных преобразований и имеют вид:

С учетом (22) и (23) выражения для потерь энергии (15) перепишем следующим образом:

$$W_{s} = \frac{3}{2} r_{1} \int_{0}^{t} i_{s\alpha}^{2} + i_{s\beta}^{2} dt;$$

$$W_{r} = r_{2} \int_{0}^{t} i_{r\alpha}^{2} + i_{r\beta}^{2} dt.$$
(24)

29

Далее, заменив токи роторных обмоток в (16)–(18), (20), (21) и (24) их приведенными величинами подобно [6] и введя в уравнения параметры Т-образной схемы замещения асинхронного двигателя, получим:

$$u_{s\alpha} = \frac{d\Psi_{s\alpha}}{dt} + r_{1}i_{s\alpha} + \frac{2}{3}u_{3};$$

$$u_{s\beta} = \frac{d\Psi_{s\beta}}{dt} + r_{1}i_{s\beta};$$

$$0 = \frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt} + r_{2}'i_{r\alpha}' + \omega_{p}\Psi_{r\beta};$$

$$0 = \frac{d\Psi_{r\beta}}{dt} + r_{2}'i_{r\beta}' - \omega_{p}\Psi_{r\alpha};$$

$$M = \frac{3}{2}\frac{x_{m}}{\omega_{o}}p \quad i_{r\alpha}'i_{s\beta} - i_{s\alpha}i_{r\beta}';$$

$$W_{s} = \frac{3}{2}r_{1}\int_{0}^{t}i_{s\alpha}^{2} + i_{s\beta}^{2} \quad dt;$$

$$W_{r} = r_{2}'\int_{0}^{t}i_{r\alpha}'^{2} + i_{r\beta}'' \quad dt,$$

$$(25)$$

$$(25)$$

$$(25)$$

$$(26)$$

$$(26)$$

$$(27)$$

где

$$\begin{aligned}
\Psi_{s\alpha} &= \omega_{o}^{-1} \quad x_{s}i_{s\alpha} + x_{m}i_{r\alpha}'; \\
\Psi_{s\beta} &= \omega_{o}^{-1} \quad x_{s}i_{s\beta} + x_{m}i_{r\beta}'; \\
\Psi_{r\alpha} &= \omega_{o}^{-1} \quad x_{r}i_{r\alpha}' + x_{m}i_{s\alpha}; \\
\Psi_{r\beta} &= \omega_{o}^{-1} \quad x_{r}i_{r\beta}' + x_{m}i_{s\beta}, \end{aligned}$$
(28)

 $x_s = x_1 + x_m$  — полное индуктивное сопротивление обмотки статора;  $x_r = x'_2 + x_m$  — полное индуктивное сопротивление приведенной обмотки ротора;  $x_1$  и  $x'_2$  — индуктивные сопротивления рассеяния статорной и приведенной роторной обмоток;  $x_m$  — индуктивное сопротивление взаимоиндукции.

В результате преобразований получены системы уравнений (25), (26) и (28) с постоянными коэффициентами, описывающие совместно с уравнением (9) электромеханические переходные процессы в идеализированных асинхронных двигателях с тормозными устройствами. Отличие этой системы от известных [1, 6] заключается в наличии дополнительного слагаемого  $\frac{2}{3}u_3$  в уравнении равновесия напряжений для эквивалентной обмотки статора по оси  $\alpha$  и дополнительных слагаемых  $M_{\rm T}1t_{\rm Tp}$  и  $M_{\rm M}(\omega_{\rm p})$  в уравнении моментов. Число уравнений в системе (десять), на первый взгляд, меньше числа неизвестных (тринадцать). В действительности же новые неизвестные  $u_3$ ,  $M_{\rm T}$  и  $M_{\rm M}(\omega_{\rm p})$  могут быть выражены через токи (потокосцепления) и параметры, входящие в эти уравнения.

В частном случае, когда  $u_3 = 0$ , системы уравнений (9), (25), (26) и (28) позволяют исследовать переходные процессы в тормозных электродвигателях с симметричными схемами управления. При  $u_3 = 0$ ;  $M_T = 0$  и  $M_M(\omega_p) = 0$  уравнения (9), (25), (26) и (28) совпадают с уже известными уравнениями электромеханического преобразования энергии в асинхронных двигателях общепромышленного исполнения [1, 6]. Последнее обстоятельство подтверждает достоверность преобразований и выводов, проведенных выше.

Из ряда факторов, оказывающих наибольшее влияние на изменение параметров АД в переходных режимах, следует отметить насыщение магнитной цепи. При этом различают насыщение по пути основного магнитного потока и по пути потоков рассеяния. В зависимости от величины основного магнитного потока, а следовательно, и индукции изменяется магнитная проводимость по пути основного магнитного потока. Это проявляется в основном как изменение сопротивления взаимоиндукции обмоток статора и ротора  $x_m$ . Влияние величины основного магнитного потока на проводимость рассеяния незначительно, и им пренебрегают [1]. Величина основного магнитного потока связана с ЭДС воздушного зазора, т. е. зависит от напряжения питания асинхронного двигателя.

Насыщение магнитной цепи по пути потоков рассеяния зависит от величин токов в обмотках, с увеличением которых, например при пуске асинхронного двигателя, сопротивление рассеяния уменьшается, что обусловлено увеличением потоков рассеяния вокруг пазов. Однако для широкого ряда общепромышленных двигателей малой и средней мощности экспериментальные исследования показали, что уравнения (9), (25), (26) и (28) для идеализированной машины справедливы и для реальной насыщенной асинхронной машины [1]. Отсюда следует, что изменение взаимоиндукции  $x_m$  при несимметрии одной из фаз статора является незначительным для упомянутых машин.

## вывод

Из рассмотренного следует, что приведенная система уравнений для АД с ВКТУ является адекватной и позволяет математически описывать переходные процессы в различных АД с ВКТУ на базе электромеханического тормоза и электромагнитной муфты скольжения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С и п а й л о в, Г. А. Математическое моделирование электрических машин / А. В. Сипайлов, А. В. Лоос. – М.: Высш. шк., 1980. – 176 с.

2. Соленков, В. В. Асинхронный электродвигатель со встроенным комбинированным тормозным устройством на базе электромеханического тормоза и электромагнитной муфты / В. В. Соленков, В. В. Брель // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2011. – № 6. – С. 20–26.

3. Соленков, В. В. Бесконтактные схемы форсировки в тормозных устройствах асинхронных двигателей / В. В. Соленков, В. В. Брель // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2009. – № 4. – С. 31–36.

4. К о н о н е н к о, Е. В. Замена короткозамкнутой обмотки ротора асинхронного двигателя эквивалентной двухфазной / Е. В. Кононенко // Известия Томского политехнического института. – 1974. – Т. 200. – С. 3–5.

5. А л е к с а н д р о в, М. П. Тормозные устройства / М. П. Александров, А. Г. Лысяков. – М.: Машиностроение, 1985. – 312 с.

6. К о н о н е н к о, Е. В. Электрические машины: специальный курс / Е. В. Кононенко, Г. А. Сипайлов, К. А. Хорьков. – М.: Высш. шк., 1975. – 279 с.

Представлена кафедрой

автоматизированного электропривода

Поступила 01.07.2013