

## ЛИТЕРАТУРА

1. Р е ш е н и е научно-практической конференции специалистов ФЭК России, РАО «ЕЭС России», АО-Энерго по теме «Вопросы формирования тарифов на электрическую тепловую энергию, производимую на ТЭЦ». – Жаворонки Моск. обл., 28–30 марта 2000.
2. П и и р, А. Э. Эффективность выработки тепла и электроэнергии на ТЭЦ / А. Э. Пиир, В. Б. Кунтыш // Энергетика... (Изв. вузов). – 1976. – № 12. – С. 127–131.
3. Ф о р м и р о в а н и е тарифов на ТЭЦ в рыночных условиях / В. А. Малофеев [и др.] // Теплоэнергетика. – 2003. – № 4. – С. 55–63.
4. П и и р, А. Э. Термодинамические закономерности производства тепла и работы в комбинированной установке / А. Э. Пиир, В. Б. Кунтыш // Проблемы экономии топливно-энергетических ресурсов на промпредприятиях и ТЭС: межвуз. сб. тр. / СПб. ГТУРП. – 1995. – Ч. 2 – С. 37–44.
5. Г о х ш т е й н, Д. П. Современные методы термодинамического анализа энергетических установок / Д. П. Гохштейн. – М.: Энергия, 1969. – 367 с.
6. П и и р, А. Э. Термодинамические основы трансформации теплоты на ТЭЦ / А. Э. Пиир, В. Б. Кунтыш // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2003. – № 1. – С. 65–72.
7. Г л а д у н ц о в, А. И. По поводу энергетического обеспечения действующего способа распределения расхода тепла на ТЭЦ / А. И. Гладунцов, Ю. В. Пустовалов // Теплоэнергетика. – 1989. – № 2. – С. 52–53.
8. Ш л я х и н, П. Н. Краткий справочник по паротурбинным установкам / П. Н. Шляхин, М. Л. Бершадский. – М.; Л.: Госэнергоиздат, 1961. – 128 с.
9. П и и р, А. Э. Топливная характеристика ТЭЦ как показатель эффективности ее работы. Совершенствование энергетических систем и технологического оборудования: сб. науч. тр. / А. Э. Пиир, В. Б. Кунтыш. – Архангельск, 2002. – С. 130–132.
10. С р а в н и т е л ь н а я оценка отечественных и зарубежных методов разделения расхода топлива и формирование тарифов на ТЭЦ / Л. С. Хрилев [и др.] // Теплоэнергетика. – 2003. – № 4. – С. 45–54.
11. П и и р, А. Э. Оценка эффективности ТЭЦ без разделения расхода топлива по видам продукции / А. Э. Пиир, В. Б. Кунтыш // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2005. – № 1. – С. 64–69.

Представлена кафедрой  
промышленной теплоэнергетики АГТУ

Поступила 14.02.2006

УДК 669.27:519

### **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЯВНОЙ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ**

**Докт. физ.-мат. наук, проф. ЧИЧКО А. Н., асп. БОРОЗДИН А. С.**

*Белорусский национальный технический университет*

Одной из важнейших задач в технологии термической обработки является выбор режимов нагрева заготовок [1]. В настоящее время использование численных методов при расчете режимов нагрева практически не проводится из-за отсутствия специальных программных средств на предприятиях. Для расчета температурных полей для заготовок простой формы

в условиях стационарного температурного поля печной среды могут использоваться двумерные модели, но для промышленных объектов сложной пространственной конфигурации сильно упрощенные двумерные аппроксимации непригодны, и расчеты проводятся на основе эмпирических формул, зачастую справедливых только для узкой группы заготовок. При этом, как правило, не учитываются пространственная конфигурация печи, положение нагревательных элементов в ней и динамический характер температурного поля нагревающей среды. Усложняет решение проблемы и способ укладки заготовок на поддоны, что требует специального учета в расчетных формулах. Перечисленные выше проблемы приводят к тому, что часто при проведении термической обработки заготовок сложной конфигурации в печах промышленного производства наблюдается высокий уровень брака из-за использования упрощенных методов расчета режимов термообработки. Поэтому моделирование процессов нагрева для заготовок сложной пространственной конфигурации в условиях нестационарного температурного поля печной среды является одной из актуальных задач в теории технологического процесса термической обработки заготовок.

Целью настоящей работы является разработка математической модели процесса термической обработки заготовок с учетом их пространственного положения в печи на основе численного моделирования.

В качестве объекта исследования была выбрана отливка «плита дробящая», изготавливаемая на одном из промышленных предприятий республики. В качестве материала использовали сталь 110 Г13Л. Трудность оптимизации режимов нагрева выбранной отливки связана с пространственной укладкой плит на тележки и конфигурацией рабочего пространства печи.

Математическая модель задачи построена на следующих предположениях:

- плиты и тележка считаются изготовленными из одного и того же материала и рассматриваются как одно целое (далее – заготовка);
- температурное поле печной среды считается однородным в каждый момент нагрева.

Для численных расчетов термических процессов были использованы математические модели, основанные на уравнении теплопроводности, имеющем вид [2–4]:

$$\alpha(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right), \quad x, y, z, \tau \in \Omega; \quad (1)$$

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z),$$

где  $c(T)$  – функция теплоемкости, Дж/(кг · К);  $\rho(T)$  – функция плотности, кг/м<sup>3</sup>;  $\lambda(T)$  – функция теплопроводности, Вт/(м · К);  $\Omega$  ( $0 \leq x < X$ ,  $0 \leq y < Y$ ,  $0 \leq z < Z$ ,  $0 \leq \tau < t$ ) – пространственно-временная область расчета;  $f(x, y, z)$  – функция начального распределения температуры.

Уравнение (1) было преобразовано следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial \lambda(T)}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda(T)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial \lambda(T)}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda(T) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial \lambda(T)}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda(T) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Предполагая, что на сеточном элементе теплопроводность постоянна, можно записать:

$$\frac{\partial \lambda(T)}{\partial x} \rightarrow 0; \quad \frac{\partial \lambda(T)}{\partial y} \rightarrow 0; \quad \frac{\partial \lambda(T)}{\partial z} \rightarrow 0.$$

В этом случае при заданной сетке первые элементы представленных компонент уравнения теплопроводности становятся равными нулю (температура и теплопроводность на уровне сеточного элемента одинаковы в силу используемого метода, да и с физических соображений – градиент температур и теплопроводности стремится к нулю на элементе сетки). Следует отметить, что такая форма позволяет учесть зависимость теплопроводности объекта от температуры. В этом случае уравнение (1) трансформируется в форму

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda(T) \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad x, y, z, \tau \in \Omega. \quad (2)$$

В качестве граничных условий в модели использовали условия I рода, применяемые к границе «печная среда – заготовка» следующего вида:

$$T(G, \tau) = \mu(\tau),$$

где  $G$  – поверхностный слой нагреваемого объекта;  $\mu(\tau)$  – функция, описывающая тепловое взаимодействие между средой рабочего пространства печи и поверхностью заготовки, определяемая режимом термической обработки.

Численное решение уравнения (2) осуществляли экономичным локально-одномерным методом [5]. Для этого в декартовой системе координат ввели пространственно-временную сетку вида:

$$x_i = ih_x \quad (i = 0, 1, \dots, N_x);$$

$$y_j = jh_y \quad (j = 0, 1, \dots, N_y);$$

$$z_k = kh_z \quad (k = 0, 1, \dots, N_z);$$

$$\tau_l = lh_\tau \quad (l = 0, 1, \dots, N_\tau).$$

По двухслойному шаблону для уравнения (1) составлена симметричная неявная разностная схема

$$\frac{u_{ijk}^{l+1} - u_{ijk}^l}{h_\tau} = \frac{1}{2} (\Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z) (u_{ijk}^{l+1} + u_{ijk}^l), \quad (3)$$

где  $u_{ijk}^l = T(x_i, y_j, z_k, \tau_l)$  – проекция функции  $T(x_i, y_j, z_k, \tau_l)$  на пространство сеточной функции,

и введены разностные операторы:

$$\Lambda_x u'_{ijk} = \frac{a(u'_{ijk})}{h_x^2} (u'_{i+1,jk} - 2u'_{ijk} + u'_{i-1,jk});$$

$$\Lambda_y u'_{ijk} = \frac{a(u'_{ijk})}{h_y^2} (u'_{ij+1k} - 2u'_{ijk} + u'_{ij-1k});$$

$$\Lambda_z u'_{ijk} = \frac{a(u'_{ijk})}{h_z^2} (u'_{ijk+1} - 2u'_{ijk} + u'_{ijk-1}).$$

Несмотря на то, что неявные схемы устойчивы при любых пространственно-временных шагах, использование их в чистом виде для трехмерных уравнений нецелесообразно из-за объема вычислительной работы. Поэтому дальнейшее решение уравнения (3) осуществляли методом расщепления. Ввели три промежуточных временных слоя. На каждом временном слое в правой части исходного уравнения (3) вместо  $\Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z$  подставили  $\Lambda_x$ ,  $\Lambda_y$  и  $\Lambda_z$  соответственно:

$$\frac{v_x^{l+1} - v_x^l}{h_\tau} = \frac{1}{2} \Lambda_x (v_x^{l+1} + v_x^l);$$

$$\frac{v_y^{l+1} - v_y^l}{h_\tau} = \frac{1}{2} \Lambda_y (v_y^{l+1} + v_y^l); \quad (4)$$

$$\frac{v_z^{l+1} - v_z^l}{h_\tau} = \frac{1}{2} \Lambda_z (v_z^{l+1} + v_z^l);$$

$$v_x^l = u'_{ijk}; \quad v_y^l = v_x^{l+1}; \quad v_z^l = v_y^{l+1}; \quad u'^{l+1}_{ijk} = v_z^{l+1}, \quad (5)$$

где  $v_p^{l+1}$  ( $p = x, y, z$ ) – решение задачи на промежуточном временном слое.

Каждое разностное уравнение системы (4) представляет собой одномерную неявную симметричную схему, для решения которой использовали метод прогонки [6]. Для этого каждое уравнение из (4) переписали в каноническом виде:

$$a_i x_{i-1} - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \quad i = (1, 2, \dots, N_t - 1) \quad (a_1 = c_{N_t-1} = 0), \quad (6)$$

где

$$x_i = v_p^{l+1}, \quad i = (0, 1, N_t); \quad a_i = -1;$$

$$b_i = -2 + \frac{1}{a(v_p^l) h_\tau}; \quad c_i = -1;$$

$$d_i = -\frac{2}{a(v_p^l) h_\tau} v_p^l - (v_{p+1}^l - 2v_p^l + v_{p-1}^l).$$

Легко заметить, что достаточное условие устойчивости метода прогонки  $|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$  для уравнения (6) выполняется. Решение системы (6) определяется по рекуррентному выражению

$$x_i = \gamma_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = (N_t - 1, N_t - 2, \dots, 1),$$

где  $\gamma_i$  и  $\beta_i$  – коэффициенты.

Для определения неизвестных коэффициентов  $\gamma_i$  и  $\beta_i$  используются следующие рекуррентные формулы:

$$\gamma_{i+1} = \frac{c_i}{b_i - a_i\gamma_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i\beta_i - d_i}{b_i - a_i\gamma_i}; \quad \gamma_0 = x_0; \quad \beta_0 = 0.$$

Входными данными для представленной модели являются пространственная конфигурация нагреваемой заготовки, теплофизические свойства материала заготовки и печной среды и режим нагрева.

На базе конечно-разностной аппроксимации представленной математической модели и клеточно-автоматного подхода был разработан программный модуль для компьютерной системы «ПроТерм-1н» [6].

Формирование клеточно-автоматной модели для решения поставленной задачи проводилось в несколько этапов. На первом этапе была построена геометрическая модель печи и тележки с плитами. На втором этапе на геометрическое описание моделируемого объекта накладывалась сетка с размерами ячейки  $h_x = h_y = h_z = h = 0,020$  м, позволившая построить клеточно-автоматную модель исследуемого объекта и нагревающей среды. Размеры клеточной модели получились следующими: 165  $\times$  1029  $\times$  1029 мм. Общее число элементов 1649340. Из них 1198112 клеток – печная среда, 451228 – плиты и тележка. Построение клеточно-автоматной модели требует задания дискретности разбиения и затем идет в автоматическом режиме. Далее каждому элементу компьютерной модели (клетке) присваивались параметры, характеризующие теплофизические свойства материалов заготовки и нагревающей среды, соответствующие реальной модели. На клеточно-автоматную модель перенесены и начальные состояния объекта моделирования и среды.

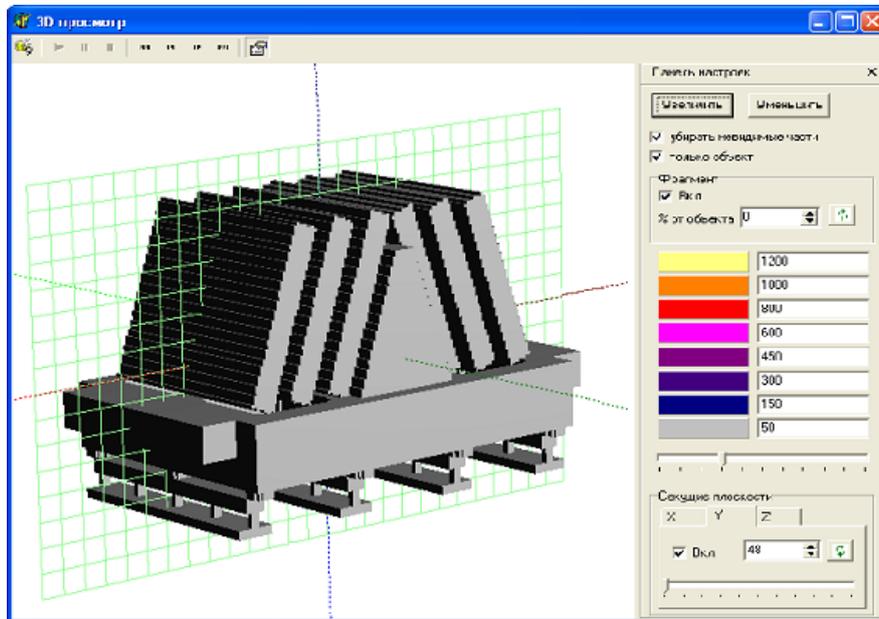
На завершающем этапе на построенной клеточно-автоматной модели печи были зафиксированы 19 контрольных точек (виртуальных термопар): одна точка – в области рабочего пространства печи и 18 точек – в стальных плитах. Таким образом, на каждую плиту приходилось по 3 точки. Копии экранов компьютерной системы «ПроТерм-1н» с продольным сечением плит и тележки, а также расположением контрольных точек представлены на рис. 1а, б.

Входными параметрами для вычислительных экспериментов являлись пространственный шаг, температурная кривая режима нагрева, теплофизические свойства плит, тележки и печной атмосферы. Начальная температура тележки и плит принималась равной  $t_0 = 50$  °С. Теплофизические характеристики для материала плит и тележки приведены в табл. 1.

В процессе компьютерного моделирования информация о температуре в контрольных точках сохранялась в текстовый файл для последующего анализа. Последующий анализ текстовых файлов производился как встроенными средствами пакета моделирования, так и программой Microsoft Excel. Для построения 3D моделей распределения температурных полей по всему объему моделируемого объекта полная информация о состоянии объекта в определенные моменты времени сохранялась в двоичный файл.

Моменты времени для сохранения бинарных данных рассчитывались так, чтобы в течение вычислительного эксперимента сохранилось 30 кадров (моментальных снимков состояния модели в определенные моменты времени) через равные промежутки времени. Дальнейшая визуализация кадров проводилась встроенными средствами «ПроТерм-1н».

а



б

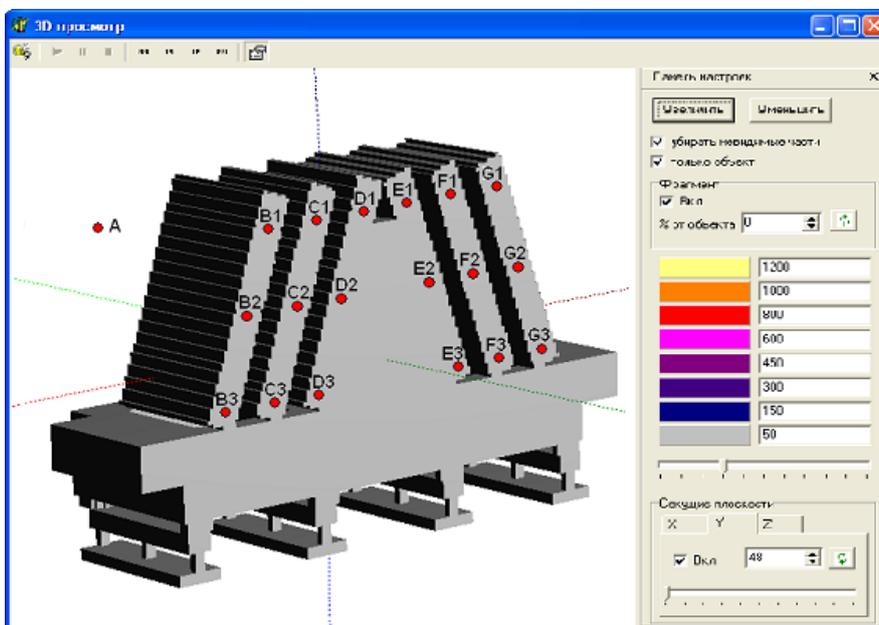


Рис. 1. Компьютерная 3D модель термообрабатываемого объекта (6 стальных плит и тележка): а – объект и секущая плоскость; б – расположение контрольных точек в объекте моделирования и в пространстве печи

Таблица 1

Теплофизические свойства стали 110 Г13Л

Параметр	Температура $t$ , °C										
	20	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$c$ , Дж/(кг · °C)	512	512	533	533	542	554	571	580	588	596	–
$\lambda$ , Вт/(м · °C)	15	15	16	18	19	21	22	24	25	27	27
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	7839	7817	7786	7752	7714	7676	7638	7600	7852	–	–

При проведении исследования использовали три режима нагрева:

1. Режим 1 – базовый режим нагрева, задаваемый автоматическим устройством в печи. Продолжительность термообработки по данным режима составляет 21 ч (75600 с).

2. Режим 2 – оцифрованные данные одной из термопар печи при нагреве по режиму 1.

3. Режим 3 – модифицированный режим. Продолжительность нагрева по данному режиму составляет 18 ч (64800 с).

Вычислительные эксперименты проводились на ЭВМ со следующими характеристиками: Pentium-IV 3,0 Гц, 1 Гб ОЗУ, Windows XP SP2. Расчет каждого их режимов занимал 70–80 мин машинного времени. Далее представлены результаты вычислительных экспериментов. На рис. 2 изображены температурно-временные диаграммы, иллюстрирующие динамику максимальных разностей температур между центром плиты и ее краями. Вычисление разности температур проводилось по формуле

$$\Delta T_j = \max(|T_{j1} - T_{j2}|, |T_{j1} - T_{j3}|), \quad (3)$$

где  $j$  – номер плиты (B, C, D, E, F, G).

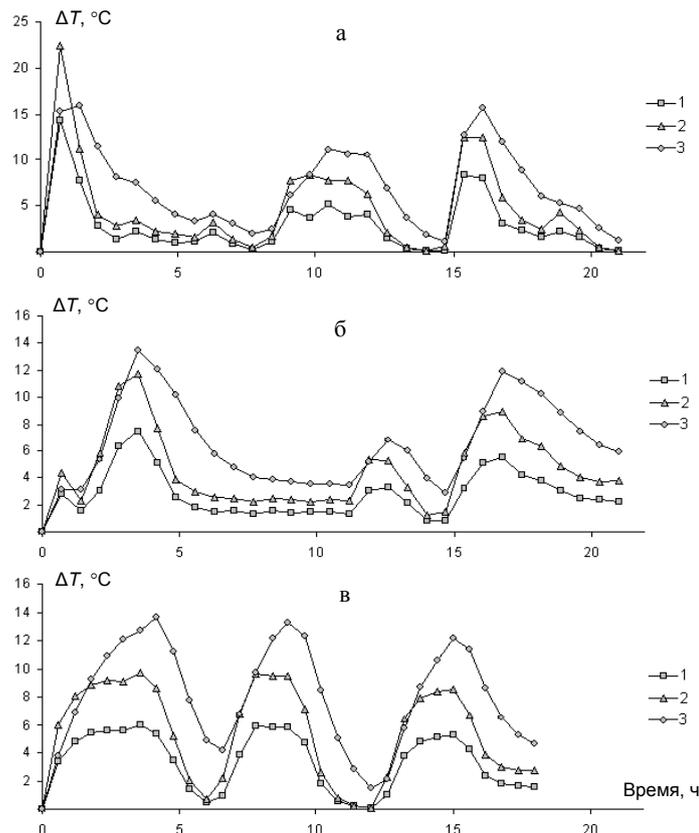


Рис. 2. Зависимость  $\Delta T$  от времени для плит нагреваемого объекта при различных режимах нагрева: а – режим 1; б – 2; в – 3; 1 – плиты B и G; 2 – C и F; 3 – D и E

Значение параметра  $\Delta T_j$  показывает уровень градиентов температур, развиваемых в заготовках. Рекомендуется, чтобы в процессе термообработки максимум разности температур не превышал 30 °С.

По представленным диаграммам видно, что все три режима удовлетворяют данному ограничению. Причем максимальное значение разности температур для режимов 2 и 3 на 10 °С меньше, чем для режима 1 (базового режима нагрева предприятия).

Для визуального контроля степени прогретости заготовки нами было предложено использовать еще один параметр, характеризующий процесс нагрева заготовки: частотное распределение элементов (клеток) плиты по абсолютному значению разности температур между элементом плиты и температурой печной атмосферы. Соответствующие распределения для описываемых термических режимов представлены на рис. 3.

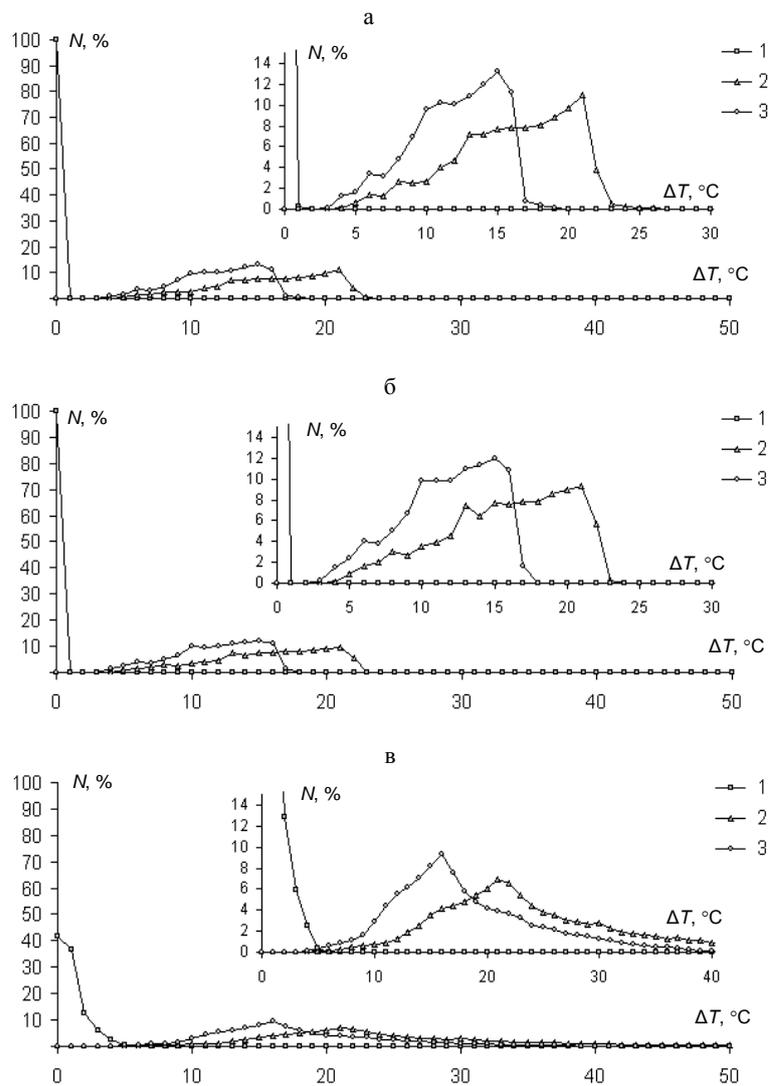


Рис. 3. Частотное распределение элементов (клеток) заготовки по параметру  $\Delta T$  (разность между температурой элемента заготовки и температурой печной атмосферы) для последнего такта нагрева: а – плиты В и G; б – С и F; в – D и E; 1 – режим 1; 2 – 2; 3 – 3

Видно, что по данному показателю режим 1 обеспечивает наилучший нагрев плит (температуры всех клеток плит *B*, *C*, *F* и *G* совпадают с температурой нагревающей среды), а режим 2 – наихудший. Также на рис. 3в можно видеть, что при всех режимах нагрева плиты *D* и *E* прогреваются хуже остальных. Результаты компьютерного моделирования позволяют сделать вывод: данный эффект связан с тем, что из-за конструктивных особенностей тележки центральные плиты *D* и *E* имеют контакт с массивной опорой в виде трапеции, расположенной в центре тележки (рис. 1б).

На рис. 4 представлены температурно-временные зависимости для центров исследуемых плит компьютерной модели при нагреве по режимам 1, 2 и 3 соответственно. На графиках пунктирной линией показано изменение температуры печной среды, что совпадает с температурной кривой нагрева для соответствующего режима.

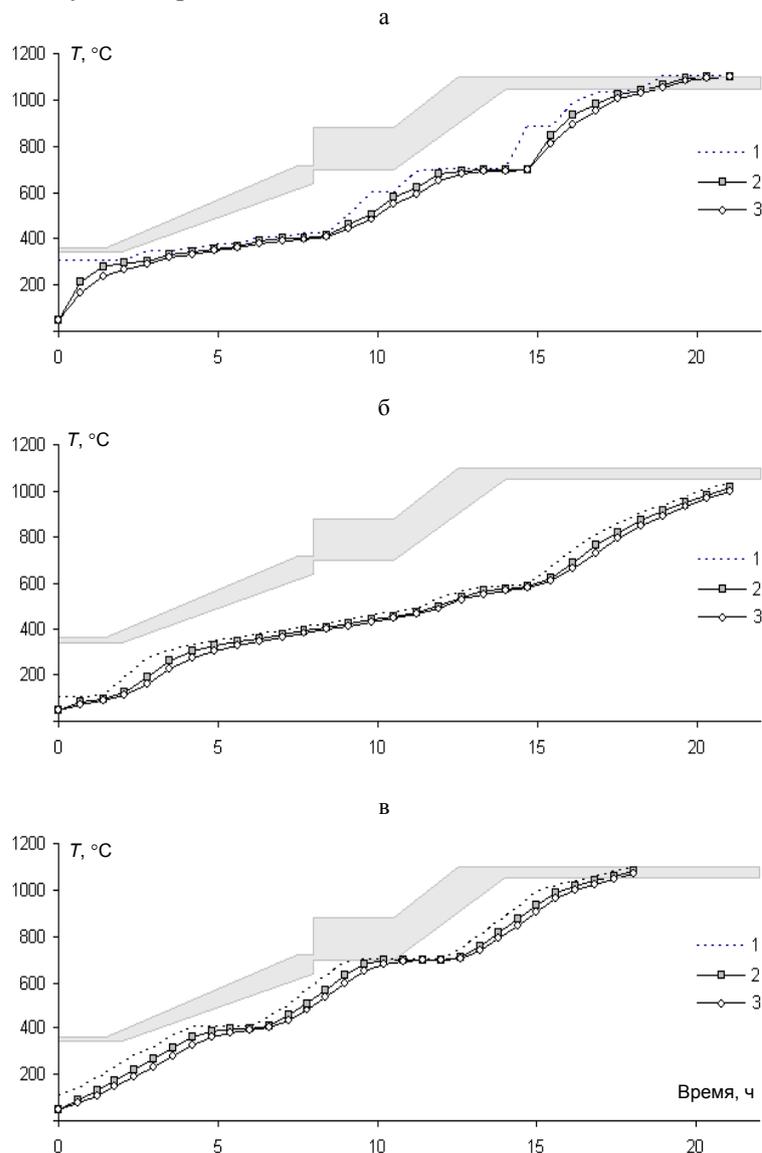


Рис. 4. Температурно-временные зависимости для центров плит при различных режимах нагрева: а – режим 1; б – 2; в – 3; 1 – печь; 2 – плиты *B*, *C*, *F*, *G*; 3 – *D*, *E*

Дополнительно, на представленных диаграммах серым цветом обозначена температурно-временная область оптимального температурного режима для закалки стали марки 110 Г13Л. Представленные температурно-временные зависимости позволяют наглядно оценить, как изменяется температурное поле для центров плит. Следовательно, можно предположить, что модифицированный режим термической обработки, предложенный в работе, наиболее близок к области оптимального нагрева. Также на представленных графиках видно, что режим 2 наиболее далек от области оптимального нагрева.

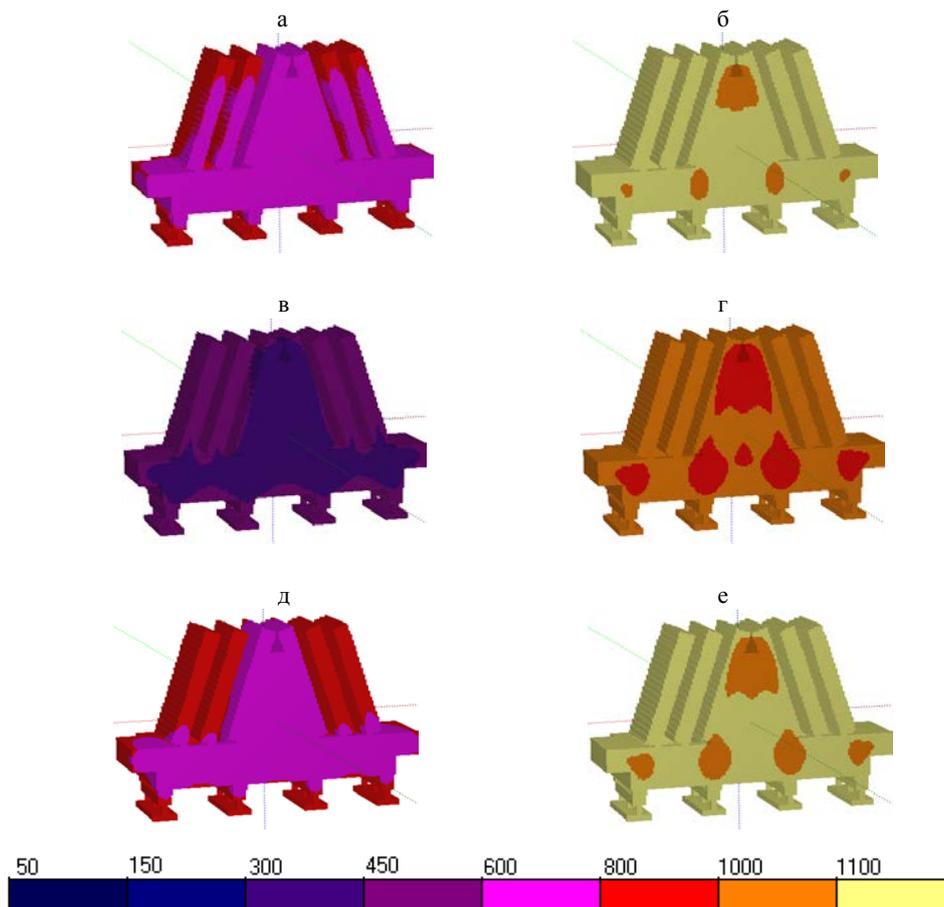


Рис. 5. Пространственное распределение температуры в одном из сечений моделируемого объекта при различных режимах нагрева и в различные моменты времени: а – режим 1,  $\tau = 14,7$  ч; б – 1,  $\tau = 20,3$  ч; в – 2,  $\tau = 7$  ч; г – 2,  $\tau = 18,9$  ч; д – 3,  $\tau = 12,6$  ч; е – 3,  $\tau = 18$  ч

На рис. 5 представлены поля температур для поверхности и рассматриваемого сечения отливки «плита дробящая» в разные моменты времени нагрева и при различных режимах нагрева. В нижней части рисунка приведена температурно-цветовая шкала, позволяющая визуально оценить распределение температур. Анализируя цветовую гамму полученных полей температур, можно легко заметить, что для всех режимов нагрева менее всего нагреваются центральные плиты, причем наиболее холодные области соответствуют местам контакта плит с трапециевидной опорой и основа-

нием тележки. Аналогично из-за контакта нижних частей крайних плит (*B* и *G*) с основанием тележки наблюдаются проблемы с их нагревом. Особенно четко это видно на рис. 5в и д.

#### ВЫВОД

Таким образом, проведенный компьютерный анализ процесса нагрева группы отливок показывает, что распределения полей температур, интегральные характеристики и временные зависимости, получаемые в программном пакете «ПроТерм-1н», могут быть использованы для обнаружения возможных причин недогрева и путей его ликвидации и также для поиска оптимальных вариантов термической обработки заготовок произвольной пространственной конфигурации в условиях нестационарного температурного поля нагревающей среды. Компьютерные 3D изображения полей температур позволяют оценить состояние модели и динамику процесса, «увидеть» области возможных недогревов и перегревов. Результаты проведенных вычислительных экспериментов позволили предложить новый режим нагрева и выработать рекомендации по термической обработке заготовок, получаемых на предприятии РУПП «Гранит».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Краткий справочник металлста / под ред. А. Н. Малова. – М.: Машиностроение, 1972. – 767 с.
2. Чичко, А. Н. Численное моделирование процесса нагрева движущегося слитка / А. Н. Чичко, А. С. Бороздин // *Литье и металлургия*. – 2003. – № 4. – С. 59–62.
3. Чичко, А. Н. Трехмерное моделирование напряженного состояния движущегося слитка при изменении граничных условий по температуре / А. Н. Чичко, А. С. Бороздин // *Энергетика...* (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2005. – № 4. – С. 61–67.
4. Чичко, А. Н. Математические модели для численного анализа процессов окиснообразования при нагреве движущихся слитков / А. Н. Чичко, А. С. Бороздин // *Литье и металлургия*. – 2004. – № 1. – С. 60–64.
5. Беляев, Н. М. Методы теории теплопроводности: в 2 ч. / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. – М.: Высш. шк., 1982. – 327 с.
6. Чичко, А. Н. Компьютерная система «ПроТерм-1н» – для моделирования процессов ступенчатого нагрева стальных слитков / А. Н. Чичко, Н. В. Андрианов, А. С. Бороздин // *Сталь*. – 2005. – № 11. – С. 66–71.

Представлена кафедрой  
машин и технологий  
литейного производства

Поступила 7.07.2006