

Видно, что изменения статического напора a_0 и диаметра горловины d_r незначительно влияют на зависимость $Q_p/Q_{p,\max} = f(d_c/d_1)$. В то же время диаметр подающего трубопровода d_1 перед эжектором и потери напора в нем оказывают существенное влияние на эту зависимость.

ВЫВОД

С использованием (14) рекомендуется производить расчеты расхода рабочей среды при работе водовоздушного эжектора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я м а е в, Б. Ф. Гидроструйные насосы и установки / Б. Ф. Лямаев. – Л.: Машиностроение, 1988. – 278 с.
2. С о к о л о в, Е. Я. Струйные аппараты / Е. Я. Соколов, Н. М. Зингер. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 351 с.
3. К а н н и н г э м, П. Г. Длины участка разрушения струи и смешивающей горловины жидкоструйного насоса для перекачки газа: теоретические основы инженерных расчетов / П. Г. Каннингэм, Р. Ж. Допкин. – М.: Мир. – 1974. – № 3. – С. 128–141.
4. К а н н и н г э м, П. Г. Сжатие газа с помощью жидкоструйного насоса: теоретические основы инженерных расчетов / П. Г. Каннингэм. – М.: Мир. – 1974. – № 3. – С. 112–127.
5. С п р а в о ч н и к по гидравлическим расчетам / под ред. П. Г. Киселева. – М.: Энергия, 1974. – 313 с.
6. К р а в ц о в М. В. Гидромеханические процессы и сооружения гидроочистки / М. В. Кравцов. – Минск: Ураджай, 1990. – 226 с.

Представлена Ученым советом
ИПК и ПК

Поступила 15.11.2005

УДК 532.517.2

ГИДРОДИНАМИКА ЗАКРУЧЕННОГО ПЛЕНОЧНОГО ДВИЖЕНИЯ

Канд. техн. наук, доц. ВОЛК А. М.

Белорусский государственный технологический университет

Пленочные течения широко используются в тазожидкостных реакторах, теплообменниках аппаратах и других технических устройствах [1–4]. Гидродинамика пленочных течений имеет важное значение при изучении ряда физико-химических процессов, для расчета оптимальных режимов работы технических устройств. Возникает необходимость исследования устойчивости движения при противотоке жидкой пленки и газового потока.

Анализ результатов исследования пленочных течений выполнен в [5, 6]. Показано, что в достаточно широком диапазоне изменения числа Рейнольдса (до 2100) стационарное пленочное течение является автомодель-

ным, и модели ламинарного пленочного движения достаточно точны при определении средних характеристик.

Рассмотрим стационарное осесимметричное ламинарное движение пленки вязкой жидкости в двухфазном потоке по внутренней стенке вертикального цилиндра радиусом R . Ось z цилиндрической системы координат направим вниз.

Запишем уравнение неразрывности

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (1)$$

В силу осесимметричности имеем $\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} = 0$. Принимая $U_r = 0$, из уравнения (1) получим $\frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$. При этих условиях решение уравнений Навье – Стокса будет автомодельным, т. е. скорость пленки будет только функцией радиуса $U = U(r)$.

При ламинарном движении и исследовании средних характеристик не учитывается перепад давления, создаваемый капиллярными силами поверхностного натяжения. В этом случае уравнение Навье – Стокса для осевой составляющей скорости принимает вид

$$\mu \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU_z}{dr} \right) \right) + \rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Считаем, что выполняется условие прилипания на стенке цилиндра и заданы касательные напряжения на границе раздела фаз «газ – жидкость». Тогда граничными условиями будут:

$$U_z|_{r=R} = 0; \quad \mu \frac{dU_z}{dr} \Big|_{r=R-\delta} = -\tau_z. \quad (3)$$

Принимаем $\psi = \frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}$, интегрируем уравнение (2) и находим

$$U_z = c_1 \ln r - \frac{\rho g - \psi}{4\mu} r^2 + c_2.$$

Из условия прилипания (3), выполнив переход к безразмерным переменным $\tilde{r} = r/R$; $\tilde{\delta} = \delta/R$, получим

$$U_z = c_1 \ln \tilde{r} + \frac{\rho g - \psi}{4\mu} R^2 (1 - \tilde{r}^2).$$

Из граничного условия

$$\frac{dU_z}{dr} \Big|_{r=R-\delta} = \frac{dU_z}{R d\tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}} = \frac{1}{R} \left(\frac{c_1}{\tilde{r}} - \frac{\rho g - \psi}{2\mu} R^2 \tilde{r} \right) \Big|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}} = -\frac{\tau_z}{\mu}$$

находим

$$c_1 = \frac{\tau_z R(1 - \tilde{\delta})}{\mu} + \frac{\rho g - \psi}{2\mu} R^2 (1 - \tilde{\delta})^2.$$

Условия равновесия сил $\pi(R - \delta)^2 \Delta p = 2\pi(R - \delta)\tau_z$, действующих на газовый поток [4], дают возможность заменить перепад давления касательными напряжениями сил трения на границе раздела фаз:

$$\frac{\Delta p}{l} = \psi = -\frac{2\tau_z}{R(1 - \tilde{\delta})}; \quad c_1 = \frac{\rho g R^2}{2\mu} (1 - \tilde{\delta})^2.$$

При этом осевая скорость в пленке жидкости составит

$$U_z = \frac{\tau_z R}{2\mu(1 - \tilde{\delta})} (1 - \tilde{r}^2) + \frac{\rho g R^2}{4\mu} \left[2(1 - \tilde{\delta})^2 \ln \tilde{r} + 1 - \tilde{r}^2 \right].$$

Найдем объемный расход жидкой фазы по площади поперечного сечения пленки, отнесенный к единице периметра цилиндра:

$$q = \frac{\iint U_z r dr d\phi}{2\pi R} = \frac{1}{R} \int_{R-\delta}^R U_z r dr = R \int_{1-\tilde{\delta}}^1 U_z \tilde{r} d\tilde{r}.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$\begin{aligned} q &= \frac{\tau_z R^2}{2\mu(1 - \tilde{\delta})} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}}^{\tilde{r}=1} + \\ &+ \frac{\rho g R^3}{4\mu} \left[(1 - \tilde{\delta})^2 \tilde{r}^2 \ln \tilde{r} - (1 - \tilde{\delta})^2 \frac{\tilde{r}^2}{2} + \frac{\tilde{r}^2}{2} - \frac{\tilde{r}^4}{4} \right] \Bigg|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}}^{\tilde{r}=1} = \\ &= \frac{\tau_z R^2}{8\mu} \left[\frac{1}{1 - \tilde{\delta}} + (1 - \tilde{\delta})^3 - 2(1 - \tilde{\delta}) \right] + \\ &+ \frac{\rho g R^3}{4\mu} \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} (1 - \tilde{\delta})^4 - (1 - \tilde{\delta})^2 - (1 - \tilde{\delta})^4 \ln(1 - \tilde{\delta}) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Данное уравнение однозначно определяет среднюю толщину пленки при заданном расходе жидкой фазы и известных касательных напряжениях на границе раздела фаз. Гравитационное течение [5] имеет место при $\tau_z = 0$.

Разлагая функции в степенной ряд, находим

$$q = \frac{\tau_z \delta^2}{2\mu} \left(1 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\delta}^k \right) + \frac{\rho g \delta^3}{3\mu} \left[1 - \tilde{\delta} + \frac{3}{20} \tilde{\delta}^2 + 18 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k-2)!}{(k+2)!} \tilde{\delta}^k \right].$$

Для анализа пленочного течения найдем скорость пленки на границе раздела фаз и градиент скорости:

$$\begin{aligned}
U_z|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}} &= \frac{\tau_z R}{2\mu} \left(\frac{1}{1-\tilde{\delta}} - 1 + \tilde{\delta} \right) + \frac{\rho g R^2}{4\mu} \left[2(1-\tilde{\delta})^2 \ln(1-\tilde{\delta}) + 1 - (1-\tilde{\delta})^2 \right] = \\
&= \frac{\tau_z \delta}{\mu} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\delta}^k \right) + \frac{\rho g \delta^2}{2\mu} \left[1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(k+2)!} \tilde{\delta}^k \right]; \\
\frac{dU_z}{dr} &= \frac{dU_z}{R d\tilde{r}} = -\frac{\tau_z \tilde{r}}{\mu(1-\tilde{\delta})} + \frac{\rho g R}{2\mu} \left[\frac{(1-\tilde{\delta})^2}{\tilde{r}} - \tilde{r} \right].
\end{aligned}$$

Осевая составляющая тензора касательных напряжений на стенке

$$\tau|_{r=R} = \mu \frac{dU_z}{R d\tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=1} = -\frac{\tau_z}{1-\tilde{\delta}} - \rho g \delta \left(1 - \frac{\tilde{\delta}^2}{2} \right).$$

Аналогично получается автомодельное решение для закрученного пленочного течения. Считаем, что касательная составляющая скорости зависит лишь от радиуса $U_\varphi = U_\varphi(r)$. В данном случае имеем уравнение

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_\varphi) \right) = 0$$

и получим решение

$$U_\varphi = c_1 \tilde{r} + \frac{c_2}{\tilde{r}}. \quad (5)$$

Используя граничные условия:

$$U_\varphi|_{\tilde{r}=1} = 0; \quad \tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{U_\varphi}{\tilde{r}} \right) \Big|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}} = -\frac{R \tau_\varphi}{\mu},$$

находим произвольные постоянные и получаем касательную составляющую скорости

$$U_\varphi = \frac{R \tau_\varphi (1-\tilde{\delta})^2}{2\mu} \left(\frac{1}{\tilde{r}} - \tilde{r} \right).$$

Найдем среднее значение касательной составляющей скорости

$$\begin{aligned}
\langle U_\varphi \rangle &= \frac{1}{\tilde{\delta}} \int_{1-\tilde{\delta}}^1 U_\varphi d\tilde{r} = \frac{1}{\tilde{\delta}} \frac{R \tau_\varphi}{2\mu} \left[\frac{(1-\tilde{\delta})^4}{2} - \frac{(1-\tilde{\delta})^2}{2} - (1-\tilde{\delta})^2 \ln(1-\tilde{\delta}) \right] = \\
&= \frac{\tau_\varphi \delta}{2\mu} \left[1 - \frac{10}{3!} \tilde{\delta} + \frac{14}{4!} \tilde{\delta}^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2(k-1)!}{(k+2)!} \tilde{\delta}^k \right].
\end{aligned}$$

Полученные зависимости позволяют найти расчетные режимы течения пленки, которые зависят от величины и направления составляющей τ_z тензора касательных напряжений сил трения на границе раздела фаз, расхода жидкой фазы q , радиуса цилиндра R .

При известных значениях данных величин из уравнения (4) или (6) находим относительную толщину пленки на внутренней или внешней стороне цилиндрической поверхности. Затем по соотношению касательных напряжений τ_z , расхода q , скорости пленки на границе раздела фаз $U_z|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}}$

и градиента скорости на стенке $\left. \frac{dU_z}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1}$ получим режимы течения.

Нисходящий прямоток: а) $q > 0$, $\tau_z \geq 0$ $\left(\frac{\tau_z}{\rho g \delta} \geq 0 \right)$; б) $q > 0$, $\tau_z < 0$,

$$U_z|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}} \geq 0, \left(-\frac{1}{2} \leq \frac{\tau_z}{\rho g \delta} < 0 \right).$$

Восходящий прямоток: $q > 0$, $U_z|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}} < 0$ $\left(-\frac{2}{3} \leq \frac{\tau_z}{\rho g \delta} < -\frac{1}{2} \right)$.

Захлебывание: $q = 0$ $\left(\frac{\tau_z}{\rho g \delta} = -\frac{2}{3} \right)$.

Восходящий противоток:

$$\text{а) } q < 0, \left. \frac{dU_z}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1} \geq 0 \left(-1 \leq \frac{\tau_z}{\rho g \delta} < -\frac{2}{3} \right);$$

$$\text{б) } q < 0, \left. \frac{dU_z}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1} < 0 \left(\frac{\tau_z}{\rho g \delta} > -1 \right).$$

Режим нисходящего прямотока ($q > 0$) имеет два типа профиля скорости, которые получаются при разных направлениях осевой составляющей тензора касательных напряжений τ_z на границе раздела фаз.

При восходящем прямотоке скорость жидкости на границе раздела фаз противоположна направлению течения.

Режим захлебывания характеризуется нулевым расходом жидкой фазы ($q = 0$). В этом случае происходит резкое увеличение толщины пленки, что соответствует реальному физическому явлению: накоплению жидкой фазы.

При восходящем противотоке движение жидкой фазы в пленке может иметь как разное (а), так и одинаковое направление (б).

При достаточно малых значениях относительной толщины пленки более простые соотношения получаем при замене величин первыми членами степенного ряда, выражения в скобках. Данные соотношения соответствуют модели течения по плоской поверхности.

Характер зависимостей (3) и (5) показывает, что знак q не зависит от коэффициента вязкости, так как $1/\mu$ является общим множителем. Данный факт подтвержден экспериментальными исследованиями [6].

ВЫВОД

Анализ скорости и объемного расхода дает возможность получить характер изменения скорости по толщине пленки в зависимости от соотношения сил трения на границе «стенка – жидкость» и массовых сил. Средние характеристики могут быть использованы при исследовании волнообразования. При достаточно малых значениях относительной толщины пленки, полагая $\tilde{\delta} = 0$, получаем как частный случай плоское течение.

Теоретические и экспериментальные исследования гидродинамики двухфазных течений позволяют расширить область применения жидких пленок и интенсифицировать в них процессы тепло-массопереноса.

Обозначения:

c_1, c_2 – константы;
 g – ускорение свободного падения;
 l – длина цилиндра;
 p – давление;
 q – объемный расход жидкой фазы, отнесенный к единице длины периметра цилиндра;
 r, φ, z – цилиндрические координаты;
 $\tilde{r}$ – безразмерная радиальная координата;
 R – радиус цилиндра;
 U_z, U_r, U_φ – осевая, радиальная и касательная составляющие скорости жидкости соответственно;
 $\langle U_\varphi \rangle$ – средняя касательная скорость пленки жидкости;
 $\delta, \tilde{\delta}$ – толщина и безразмерная толщина пленки жидкости;
 μ – коэффициент динамической вязкости жидкости;
 ρ – плотность жидкости;
 τ – тензор касательных напряжений;
 τ_z, τ_φ – осевая и касательная составляющие тензора касательных напряжений на границе раздела фаз;
 $\psi = \Delta p / l$ – перепад давления в пленке жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

- Капица, П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости: Ч. 1 / П. Л. Капица // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1948. – Т. 18. – № 1. – С. 3–28.
- Капица, П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости: Ч. 2 / П. Л. Капица, С. П. Капица // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1949. – Т. 19. – № 2. – С. 105–120.
- Стырькович, М. А. Теплообмен и гидродинамика в двухфазных потоках атомных электрических станций / М. А. Стырькович, В. С. Полонский, Г. В. Циклаури. – М., 1982. – 368 с.
- Соколов, В. И. Газожидкостные реакторы / В. И. Соколов, И. В. Доманский. – Л.: Машиностроение, 1976. – 216 с.
- Воронцов, Е. Г. Теплообмен в жидких пленках / Е. Г. Воронцов, Ю. М. Тананайко. – Киев, 1972. – 194 с.
- Уоллис, Г. Б. Одномерные двухфазные течения / Г. Б. Уоллис. – М.: Мир, 1972. – 440 с.

Представлена кафедрой
высшей математики

Поступила 15.11.2005