

УДК 669.27:519

## О ТОЧНОСТИ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ НАГРЕВА И ОХЛАЖДЕНИЯ ОБЪЕКТОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ РАСХОДОВАНИЯ ЭНЕРГОРЕСУРСОВ

Докт. физ.-мат. наук, проф. ЧИЧКО А. Н., асп. САЧЕК О. А.

*Белорусский национальный технический университет*

При решении сложных теплотехнических задач применяются численные методы расчета. Точность используемых численных схем при этом может существенно различаться. Экспериментально оценить адекватность численных схем довольно сложно, а аналитические решения тепловой задачи для объектов, имеющих сложную пространственную геометрию, отсутствуют. Однако во многих публикациях этот вопрос поднимается в том случае, когда речь идет об анализе получаемых решений, что свидетельствует об актуальности этой проблемы.

В статье рассмотрена тепловая задача для охлаждаемого двумерного металлического блюда. Аналитические решения, полученные для этого случая, сравниваются с результатами моделирования, полученными по явной и неявной численным схемам. Целью настоящей работы является численное моделирование температуры двумерного охлаждаемого объекта на основе аналитической схемы, неявной численной и явной численной схем.

Для оценки погрешности этих схем при моделировании на первом этапе исследования были проведены аналитические вычисления распределения температуры в охлаждаемом квадрате. В качестве модели использовали уравнение теплопроводности и систему начальных и граничных условий:

$$\Delta U = \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2} \right); \quad (1)$$

$$U|_{x=\pm a} = T_1; \quad (2)$$

$$\begin{cases} U|_{y=\pm b} = T_1; \\ U|_{t=0} = T, \end{cases} \quad (3)$$

где  $a = \lambda_1/(c\rho)$  – коэффициент температуропроводности материала;  $\lambda_1$  – теплопроводность;  $c$  – теплоемкость;  $\rho$  – плотность.

В прямоугольнике  $G = \{-a < x < a, -b < y < b\}$  для промежутка времени  $0 \leq t \leq t_1$ .

Для нахождения решения уравнения (1) обозначим  $U(x, y, t) = T_1 + U_1(x, y, t)$ .

После этого решение задачи (1)–(3) согласно методу Фурье [1] находим в виде

$$U_1(x, y, z, t) = U(x, y, z)T(t). \quad (4)$$

После подстановки в (1) получим:

$$\frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{1}{a} \frac{T'}{T} = -\lambda,$$

где  $\lambda$  – постоянная,  
или

$$\begin{aligned} \Delta U_1 + \lambda U_1 &= 0; \\ T(t) &= ce^{-\lambda at}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если  $U_{km}$  – собственные функции;  $\lambda_{km}$  – собственные значения уравнения (5), то решение задачи (1)–(3) записывается в виде

$$U_1(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_{km}(t) U_{km}(x, y). \quad (6)$$

Предположим, что температура в объекте подчиняется закону косинуса и может быть представлена в виде произведения двух функций, тогда в качестве  $U_{km}$  выбирается функция:

$$U_{km} = \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b},$$

а функция  $T_{km}(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{a} T'_{km}(t) = -\lambda_{km},$$

где

$$\lambda_{km} = \left( \frac{(2k+1)\pi}{2a} \right)^2 + \left( \frac{(2m+1)\pi}{2b} \right)^2.$$

Найдем эту функцию в виде

$$T_{km} = \alpha_{km} e^{-\lambda_{km} at}.$$

Коэффициенты  $\alpha_{km}$  определяем из начальных условий. Подставляя (4), (6) в (3), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{km} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b} = T_0 - T_1. \quad (7)$$

Умножая (7) на значения  $\cos \frac{(2i+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2j+1)\pi y}{2b}$  после интегрирования по  $x, y$  от  $[-a; a], [-b; b]$  соответственно получим

$$ab\alpha_{ij} = (T_0 - T_1) \frac{4a(-1)^{i+1}}{\pi(2i+1)} \frac{4b(-1)^{j+1}}{\pi(2j+1)}.$$

Следовательно:

$$\alpha_{ij} = \frac{16(T_0 - T_1)(-1)^{i+1}(-1)^{j+1}}{\pi^2(2i+1)(2j+1)}.$$

Таким образом, для вычисления распределения температуры предлагается следующая аналитическая формула:

$$U = T_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_{km}(t) U_{km}(x, y).$$

Здесь  $U_{km} = \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b}$ ;  $T_{km} = \alpha_{km} e^{-\lambda_{km}at}$ ,

$$\lambda_{km} = \left( \frac{(2k+1)\pi}{2a} \right)^2 + \left( \frac{(2m+1)\pi}{2b} \right)^2, \quad \alpha_{km} = \frac{16(T_0 - T_1)(-1)^{k+1}(-1)^{m+1}}{\pi^2(2k+1)(2m+1)}.$$

Общая формула имеет вид

$$U(x, y, t) = T_1 + \frac{16(T_0 - T_1)}{\pi^2} \sum_k \sum_m \frac{(-1)^{k+1}(-1)^{m+1}}{(2k+1)(2m+1)} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \times \\ \times \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b} e^{-\frac{((2k+1)^2 + (2m+1)^2)\pi^2 at}{4ab}}.$$

На втором этапе уравнение теплопроводности вида (1)–(3) было распи-  
сано в явной конечно-разностной аппроксимации [2, 3].

Для построения разностной схемы введем разностную сетку с координатами узлов  $(x_p, y_l, t^n)$ , где  $x_p = p\Delta x (p = 0, 1, 2, \dots, P; \Delta x = 2a/P)$ ;  $y_l = l\Delta y (l = 0, 1, 2, \dots, L; \Delta y = 2b/L)$ ;  $t^n = n\tau (n = 0, 1, 2, \dots, t_1/\tau)$ . Тогда значение функции в узле  $(x_i, y_j, t^n)$  обозначим через  $y_{ij}^n = U(i\Delta x, j\Delta y, n\tau)$ . Решение задачи (1)–(3) можно найти с помощью явной схемы

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^n + \Lambda_2 y_{ij}^n,$$

где

$$\Lambda_1 y_{ij} = a \frac{y_{i+1,j} - 2y_{ij} + y_{i-1,j}}{\Delta x^2}; \quad \Lambda_2 y_{ij} = a \frac{y_{i,j+1} - 2y_{ij} + y_{i,j-1}}{\Delta y^2}. \quad (8)$$

В качестве краевых условий использовали условия (2):

$$y_{ij}^{n+1} = T_1, \text{ где } i=0 \text{ и } i=P, \quad j=0 \text{ и } j=L, \quad n=-1, 0, 1, \dots, N-1, \quad (9)$$

$$y_{ij}^0 = T_0, \text{ где } i=1, 2, \dots, P-1, \quad j=1, 2, \dots, L-1.$$

Таким образом, решение разностной схемы (8) находится по временным слоям с помощью явной формулы:

$$y_{ij}^{n+1} = y_{ij}^n + \tau(\Lambda_1 y_{ij}^n + \Lambda_2 y_{ij}^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, (t_1/\tau - 1).$$

На третьем этапе была предложена неявная схема уравнения теплопроводности [2, 3]

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^{n+1} + \Lambda_2 y_{ij}^{n+1},$$

где

$$\Lambda_1 y_{ij} = a \frac{y_{i+1,j} - 2y_{ij} + y_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \quad \Lambda_2 y_{ij} = a \frac{y_{i,j+1} - 2y_{ij} + y_{i,j-1}}{\Delta y^2}.$$

Краевые условия аналогичны (9).

Для поиска решения использовалась продольно-поперечная схема переменных направлений [2, 4]. Наряду с основными значениями функции  $y(x, y, t)$ , т. е.  $y_{ij}^n$  и  $y_{ij}^{n+1}$ , вводится промежуточное значение  $y_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$ , которое рассматривается как значение  $y_{ij}$  при  $t = t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \tau/2$ . Переход от слоя  $n$  к слою  $(n+1)$  совершается в два этапа с шагами  $0,5\tau$ :

$$\frac{y_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - y_{ij}^n}{0,5\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y_{ij}^n; \quad (10)$$

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{0,5\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y_{ij}^{n+1}. \quad (11)$$

Перепишем уравнение (10) в виде [2]

$$0,5\gamma_1 y_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - (1-\gamma_1) y_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + 0,5\gamma_1 y_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -(y_{ij}^n + 0,5\tau\Lambda_2 y_{ij}^n),$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\tau a}{\Delta x^2}.$$

Перепишем уравнение (11) в виде

$$0,5\gamma_2 y_{i,j-1}^{n+1} - (1 - \gamma_2) y_{ij}^{n+1} + 0,5\gamma_2 y_{i,j+1}^{n+1} = - \left( y_{ij}^{\frac{n+1}{2}} + 0,5\tau\Lambda_2 y_{ij}^{\frac{n+1}{2}} \right),$$

где

$$\gamma_2 = \frac{\tau a}{\Delta y^2}.$$

Уравнения решаем методом прогонки.

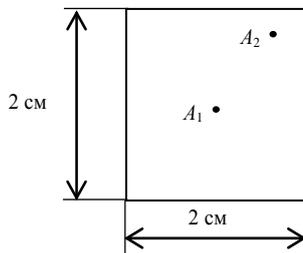


Рис. 1. Геометрия моделируемого объекта:  $\lambda = 0,00007$  кал/(кг·град);  
 $c = 0,14$  кал/(кг·град);  
 $\rho = 0,0072$  кг/см<sup>3</sup>

По явной и неявной схемам была разработана программа, позволяющая рассчитывать температурное поле в охлаждаемом объекте. Геометрия моделируемого поля показана на рис. 1. На рис. 2 представлено распределение температур в рассматриваемом объекте (охлаждающемся металлическом квадрате) для трех моментов времени. Температуры получены с использованием аналитической схемы с шагом дискретизации координат 0,1, значение температуры рассматривается в центре ячейки.

Как видно, распределение температуры симметрично относительно центра квадрата.

Анализ рассчитанных распределений по температуре показал, что значение температур различается между собой для аналитической, явной и неявной схем. Величина расхождения по температурам различна. Поэтому для анализа были введены параметры, характеризующие значения разницы между температурами, полученными с помощью аналитической и численной схем:

$$P_1 = |T_{\text{анал}} - T_{\text{я.с.}}|;$$

$$P_2 = |T_{\text{анал}} - T_{\text{н.с.}}|,$$

где  $T_{\text{анал}}$  – температура, полученная с помощью аналитической схемы;  $T_{\text{я.с.}}$  – то же явной схемы;  $T_{\text{н.с.}}$  – то же неявной схемы.

На рис. 3 представлены двумерные распределения параметра расчета  $P_1$  для различных значений шага дискретизации по времени  $\Delta t$ . Как видно из рисунка, максимальные значения параметров  $P_1$  локализованы в центральной части квадрата, при уменьшении шага по времени для явной схемы значения параметров уменьшаются. Было установлено также, что при уменьшении шага дискретизации по времени  $\Delta t$  в центре квадрата образуется область с меньшими значениями  $P_1$ , т. е. с более точными значениями температуры, полученной по явной схеме.

I зона	II зона	III зона	IV зона	V зона	VI зона	VII зона
0-115	116-230	231-345	346-460	461-575	576-690	691-805

а

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	50,02	81,38	109,95	134,98	155,97	172,68	185,09	193,25	199,00
3	0	81,38	132,4	178,88	219,6	253,75	280,94	301,12	314,41	321,00

б

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	32,57	53,28	72,55	89,89	104,89	117,23	126,68	133,06	136,00
3	0	53,28	87,17	118,7	147,06	171,6	191,79	207,25	217,68	222,00

в

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	15,95	26,15	35,7	44,36	51,93	58,22	63,07	66,37	68,04	68,04	66,37	63,07	58,22	51,93	44,36	35,7	26,15	15,95	0
3	0	26,15	42,86	58,51	72,71	85,12	95,42	103,38	108,79	111,53	111,53	108,79	103,38	95,42	85,12	72,71	58,51	42,86	26,15	0
4	0	35,7	58,51	79,88	99,26	116,2	130,26	141,12	148,51	152,25	152,25	148,51	141,12	130,26	116,2	99,26	79,88	58,51	35,7	0
5	0	44,36	72,71	99,26	123,36	144,4	161,88	175,37	184,55	189,2	189,2	184,55	175,37	161,88	144,4	123,36	99,26	72,71	44,36	0
6	0	51,93	85,12	116,2	144,4	169,03	189,5	205,29	216,04	221,48	221,48	216,04	205,29	189,5	169,03	144,4	116,2	85,12	51,93	0
7	0	58,22	95,42	130,26	161,88	189,5	212,44	230,14	242,19	248,29	248,29	242,19	230,14	212,44	189,5	161,88	130,26	95,42	58,22	0
8	0	63,07	103,38	141,12	175,37	205,29	230,14	249,33	262,38	268,99	268,99	262,38	249,33	230,14	205,29	175,37	141,12	103,38	63,07	0
9	0	66,37	108,79	148,51	184,55	216,04	242,19	262,38	276,12	283,07	283,07	276,12	262,38	242,19	216,04	184,55	148,51	108,79	66,37	0
10	0	68,04	111,53	152,25	189,2	221,48	248,29	268,99	283,07	290,19	290,19	283,07	268,99	248,29	221,48	189,2	152,25	111,53	68,04	0
11	0	68,04	111,53	152,25	189,2	221,48	248,29	268,99	283,07	290,19	290,19	283,07	268,99	248,29	221,48	189,2	152,25	111,53	68,04	0
12	0	66,37	108,79	148,51	184,55	216,04	242,19	262,38	276,12	283,07	283,07	276,12	262,38	242,19	216,04	184,55	148,51	108,79	66,37	0
13	0	63,07	103,38	141,12	175,37	205,29	230,14	249,33	262,38	268,99	268,99	262,38	249,33	230,14	205,29	175,37	141,12	103,38	63,07	0
14	0	58,22	95,42	130,26	161,88	189,5	212,44	230,14	242,19	248,29	248,29	242,19	230,14	212,44	189,5	161,88	130,26	95,42	58,22	0
15	0	51,93	85,12	116,2	144,4	169,03	189,5	205,29	216,04	221,48	221,48	216,04	205,29	189,5	169,03	144,4	116,2	85,12	51,93	0
16	0	44,36	72,71	99,26	123,36	144,4	161,88	175,37	184,55	189,2	189,2	184,55	175,37	161,88	144,4	123,36	99,26	72,71	44,36	0
17	0	35,7	58,51	79,88	99,26	116,2	130,26	141,12	148,51	152,25	152,25	148,51	141,12	130,26	116,2	99,26	79,88	58,51	35,7	0
18	0	26,15	42,86	58,51	72,71	85,12	95,42	103,38	108,79	111,53	111,53	108,79	103,38	95,42	85,12	72,71	58,51	42,86	26,15	0
19	0	15,95	26,15	35,7	44,36	51,93	58,22	63,07	66,37	68,04	68,04	66,37	63,07	58,22	51,93	44,36	35,7	26,15	15,95	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 2. Распределение температур в объекте на момент времени: а –  $\tau = 2$  с; б –  $\tau = 3$  с; в –  $\tau = 5$  с; рассчитано по неявной схеме ( $\Delta x = 0,05$ ;  $\Delta y = 0,05$ ;  $\Delta \tau = 0,01$ )

Для более достоверного анализа на следующем этапе были введены абсолютные параметры, характеризующие отклонения по температурам, рассчитанным по различным схемам, не зависящие от величины температуры. В исследовании использовали два параметра сходимости решений (погрешности) для явной и неявной схем:

$$P_3 = \frac{|T_{\text{анал}} - T_{\text{я.с.}}|}{T_{\text{анал}}} \cdot 100 \%;$$

$$P_4 = \frac{|T_{\text{анал}} - T_{\text{н.с.}}|}{T_{\text{анал}}} \cdot 100 \%$$

I зона	II зона	III зона	IV зона	V зона
0-19	20-34	35-49	50-64	65-80

а

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	28,2	38,56	47,67	55,36	61,56	66,31	69,71	71,89	72,8
3	0	38,56	48,37	56,65	63,33	68,46	72,17	74,68	76,19	76,8

б

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	27,77	37,71	46,44	53,8	59,75	64,33	67,61	69,72	70,8
3	0	37,71	46,69	54,22	60,28	64,91	68,27	70,55	71,94	72,8

в

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	27,51	37,2	45,7	52,87	58,68	63,14	66,36	68,43	69,8
3	0	37,2	45,68	52,77	58,45	62,79	65,95	68,1	69,42	70,8

Рис. 3. Двумерное распределение параметра сходимости  $P_1$  явной схемы при  $\Delta x = \Delta y = 0,1$  для различных  $\Delta \tau$  (для сходимости  $\Delta \tau \leq 0,0025$ ): а –  $\Delta \tau = 0,0025$ ; б –  $0,001$ ; в –  $\Delta \tau = 0,0001$

На рис. 4а представлено значение параметров сходимости решений для явной и неявной схем для точки квадрата, находящейся в центре. Как видно из рисунка, увеличение шага по времени увеличивает погрешность расчетов по температуре, причем явная схема для шага по времени  $\Delta\tau < 0,06$  приводит к существенному различию явной и неявной схем, т. е. отклонение от аналитического решения для явной и неявной схем может быть различно в зависимости от дискретности по пространству.

На рис. 4б представлены значения параметров  $P_3$  и  $P_4$  для точки квадрата, находящейся вблизи угла. Как видно из рисунка, погрешность в расчетах температур изменяется подобно предыдущей зависимости. Точки квадрата, выбранные для анализа изменения температур на рис. 2а–в, 3а–в, 5а–в, выделены рамкой.

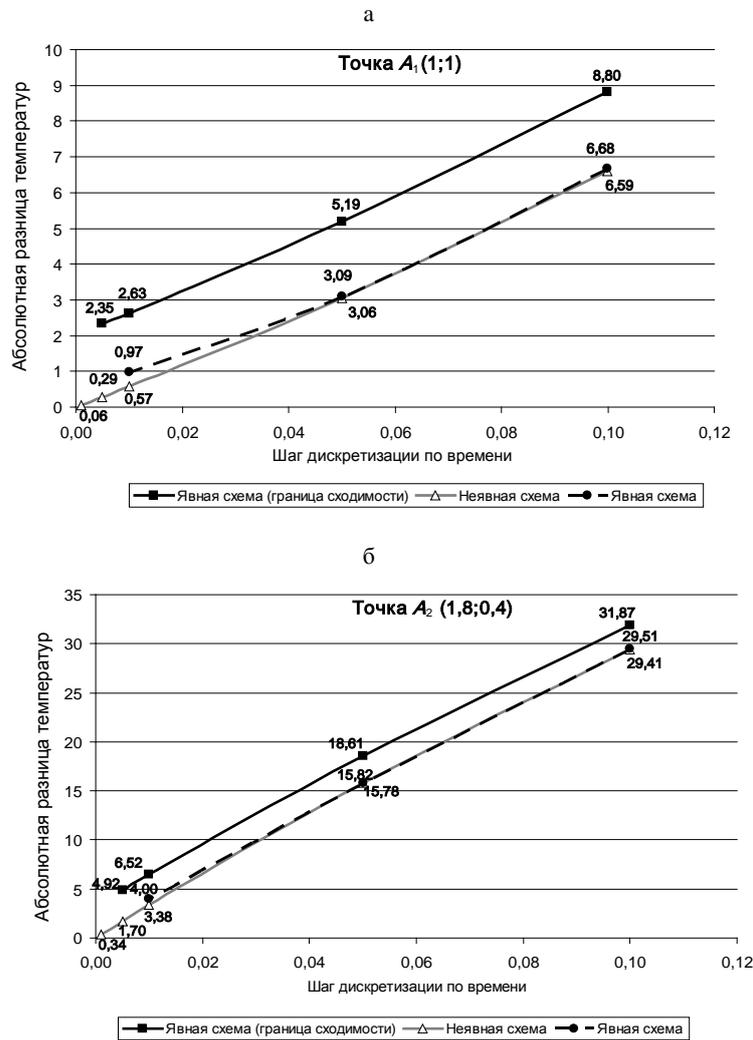


Рис. 4. Влияние шага дискретизации по координатам на параметры сходимости  $P_3$  и  $P_4$  для выделенных точек  $A_1$  и  $A_2$

На рис. 5а–в представлено двумерное распределение погрешности расчета (параметров  $P_3$  и  $P_4$ ) для температуры для различных случаев. Как видно из рисунка, максимальные значения параметров локализованы по



В табл. 1, 2 представлены параметры и результаты решения численных схем, используемых при вычислениях с помощью явной и неявной схем. Параметр сходимости для явной схемы вычислялся по формуле

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Таблица 1

**Параметры и результаты моделирования для рассматриваемых вычислительных экспериментов с помощью явной схемы**

$\Delta x$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,05	0,01	0,01	0,01	0,005
$\Delta y$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,05	0,01	0,01	0,01	0,005
$\Delta\tau$	0,01	0,0025	0,001	0,0001	0,000625	0,0001	0,00001	0,000025	0,00001	0,000005	0,0000063
$P_1^{\max}$	127,89	79,01	72,78	70,06	45,49	36,07	35,05	21,02	11,78	8,98	18,47
$P_3^{\max}$	62,3	56,75	55,66	55,01	57,11	55,69	55,45	57,1591	56,20	55,8774	57,142

Таблица 2

**Параметры и результаты моделирования для рассматриваемых вычислительных экспериментов с помощью неявной схемы**

$\Delta x$	0,1	0,05	0,01	0,005
$\Delta y$	0,1	0,05	0,01	0,005
$\Delta\tau$	0,001	0,001	0,0001	0,001
$P_2^{\max}$	69,76	34,96	7,00	3,50
$P_4^{\max}$	54,94	55,42	55,5577	55,5586

Таким образом, наиболее точные решения тепловой задачи дает неявная численная схема, обеспечивающая наименьшую погрешность в расчетах по температуре, о чем свидетельствует близость моделируемых температур, полученных по аналитической и численной схемам расчета.

### ВЫВОДЫ

1. Показано, что при решении тепловых задач наиболее близки к значениям температур, полученным по аналитической схеме, величины температур, полученные по неявной схеме.
2. При уменьшении шага дискретизации по времени значения температур, полученные с помощью явной схемы, приближаются к величинам температур, полученным с помощью неявной схемы.
3. Установлено, что максимальные погрешности параметров расчета в тепловой задаче по различным численным схемам локализованы по углам квадрата.

### ЛИТЕРАТУРА

1. А р а м а н о в и ч, И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М.: Наука, 1964. – 288 с.
2. С а м а р с к и й, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин,. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
3. Б е р к о в с к и й, Б. М. Разностные методы исследования задач теплообмена / Б. М. Берковский, Е. Ф. Ноготов. – Минск: Наука и техника, 1976. – 144 с.
4. С а м а р с к и й, А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1971. – 552 с.

Представлена кафедрой  
машин и технологий литейного производства

Поступила 5.05.2007