

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДВУМЕРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОТЫ

Докт. техн. наук, проф. ЕСЬМАН Р. И.

Белорусский национальный технический университет

Во многих технологиях получения современных композиционных материалов со специальными свойствами действуют внутренние источники теплоты. Они могут быть положительными (выделение теплоты фазового перехода при затвердевании, теплоты кристаллизации при формировании металлических литых изделий, теплоты испарения при увлажнении материалов и т. д.) или отрицательными (процессы сушки, испарения влаги во влажном материале в процессе нагревания и т. д.).

В работе приведены математическая модель и численное решение задачи нестационарной теплопроводности с переменными источниками теплоты, действующими на протяжении процесса затвердевания. При этом учитывается перемещение фронта фазовых превращений во времени и пространстве. Разработанные математическая модель и алгоритм расчета применяются в данном случае для анализа теплотехнологий получения современных строительных материалов на основе сухих смесей – изделий из гипса, пеногипса, пенобетона, пенополистирола и гипсовых плит со специальными свойствами.

Представленная в работе модель нестационарной теплопроводности с фазовыми превращениями применяется для расчета поля температур и температурных напряжений гипсовых плит пазогребневой конструкции и металлических форм.

В последнее время в производстве взаимозаменяемых стеновых материалов важное место занимают влаго- и огнестойкие гипсовые перегородочные плиты пазогребневой конструкции. Они представляют собой гипсовые вяжущие изделия, изготовленные по литейной технологии. Производство таких изделий осуществляется в цельнометаллических подвижных формах высокопроизводительных карусельных формовочных машин. После удаления из формовочной машины плиты сушат в туннельном сушиле с рециркуляционной системой.

В работе приведено численное решение задачи сложного теплообмена при получении пазогребневых плит в виде прямоугольного параллелепипеда в металлической форме. Ввиду двойной осевой симметрии можно ограничиться изучением тепловых процессов в плите и форме, расположенных в первой координатной четверти. При расчете учитывается зазор между формирующейся плитой и металлической формой, образованный слоем покрытия (масляной эмульсией) и газовой прослойки, обусловленной усадкой вяжущего материала и термическими деформациями металлической формы.

Пусть размеры четверти формы a , x , b , а четверти плиты a_0 , x , b_0 , (рис. 1). Внутренняя поверхность формы покрыта масляной эмульсией

толщиной $\delta_{\text{покр}}$. Между плитой и формой возможно образование воздушного зазора, переменного вдоль линии контакта и изменяющегося во времени $\delta(t)$.

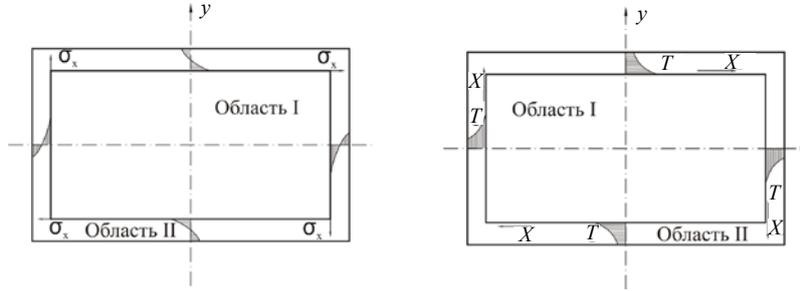


Рис. 1. Эпюры температур и профильных температурных напряжений в сечениях металлической формы

Поле температур в плите и форме описывается дифференциальными уравнениями [1]:

$$c_1(T_1)\rho_1(T_1)\frac{\partial T_1(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1(x,y,t)}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1(x,y,t)}{\partial y}\right]; \quad (1)$$

$$c_2(T_2)\rho_2(T_2)\frac{\partial T_2(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2(x,y,t)}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2(x,y,t)}{\partial y}\right], \quad (2)$$

где $c_1, \rho_1, \lambda_1, T_1$ и $c_2, \rho_2, \lambda_2, T_2$ – теплофизические характеристики и температуры плиты и формы соответственно.

Уравнение (1) решается в прямоугольной области ($0 \leq x \leq a_0; 0 \leq y \leq b_0$), а уравнение (2) – в сложной области в виде угла, получаемого при вычитании из области ($0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b$) области, занятой плитой.

Сформулируем граничные и контактные условия. Контактные условия ставятся на общей границе плиты и формы исходя из условий сопряжений.

Рассматривая теплоотдачу от плиты к форме через двухслойную стенку (воздух + покрытие) по аналогии с одномерной задачей граничные условия можно записать в виде:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{[T_1(y,t) - T_2(y,t)] \left[\frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta(y,t)} + \alpha_{\text{л}}(y,t) \right] \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}}}{\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + \frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta(y,t)} + \alpha_{\text{л}}(y,t)} \quad (3)$$

при $x = a_0; 0 \leq y \leq b_0;$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} = \frac{[T_1(x,t) - T_2(x,t)] \left[\frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta(x,t)} + \alpha_{\text{л}}(x,t) \right] \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}}}{\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + \frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta(x,t)} + \alpha_{\text{л}}(x,t)} \quad (4)$$

при $y = b_0; 0 \leq x \leq a_0,$

где $\lambda_{\text{покр}}, \lambda_{\text{в}}$ – теплопроводность покрытия и воздуха; $\delta(x, t)$ – зазор в контакте $y = b_0$ в момент времени t ; $\delta(y, t)$ – то же $x = a_0$ в момент времени t ;

$$\alpha_{\text{л}} = \varepsilon_{1/2} \sigma (T_1 + T_{\text{покр}})(T_1^2 + T_{\text{покр}}^2), \quad (5)$$

где $T_{\text{покр}}$ – температура поверхности покрытия, смежной с плитой, определяется следующим образом:

$$T_{\text{покр}} = \frac{T_2 \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + T_1 \left(\frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta} + \alpha_{\text{л}} \right)}{\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + \frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta} + \alpha_{\text{л}}}. \quad (6)$$

Значения T_1, T_2 и δ берутся в соответствующей точке контактной поверхности, в которой определяются $T_{\text{покр}}$ и $\alpha_{\text{л}}$.

Напомним, что при записи (3) и (4) учитывали только процесс теплопроводности через покрытие и процессы теплопроводности и теплоизлучения через слой воздуха. Процессом конвекции в зазоре пренебрегаем.

Продолжим формулировку граничных условий. На осях симметрии можно записать:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{\partial T_2}{\partial x} = 0 \quad \text{при } y = 0;$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

Предполагая, что теплообмен с наружной поверхности формы можно представить по закону Ньютона, будем иметь:

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \alpha (T_2 - T_{\infty}) \quad \text{при } x = a;$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \alpha (T_2 - T_{\infty}) \quad \text{при } y = b,$$

где T_{∞} – температура внешней среды; α – коэффициент теплоотдачи с наружной поверхности формы.

Коэффициент α определяется способом охлаждения наружной поверхности формы.

При свободном охлаждении формы в безграничном пространстве коэффициент α характеризует собой теплоотдачу свободной конвекцией и излучением $\alpha = \alpha_{\text{к}} + \alpha_{\text{л}}$. Тогда запишем:

$$\alpha_{\text{к}} = f(\text{Gr}, \text{Pr});$$

$$\alpha_{\text{л}} = \varepsilon \sigma (T_2^2 + T_{\infty}^2)(T_2 + T_{\infty}).$$

При вынужденном охлаждении формы

$$\alpha = f(\text{Re}, \text{Pr}),$$

причем число Re вычисляется по толщине охлаждающей рубашки формы.

Начальные условия для уравнений (1), (2) запишутся следующим образом:

$$T_1(x, y, 0) = T_{1_0};$$

$$T_2(x, y, 0) = T_{2_0},$$

где T_{1_0} – температура заливки; T_{2_0} – начальная температура равномерно прогретой формы.

В качестве характерного размера выберем длину формы a , а в качестве характерной температуры – температуру окружающей среды $T_0 = T_\infty$. Перепишем задачу в безразмерных переменных:

$$a^2 c_1 \rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (7)$$

при $0 \leq x \leq \bar{a}_0$; $0 \leq y \leq \bar{b}_0$;

$$a^2 c_2 \rho_2 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (8)$$

при $0 \leq x \leq 1$; $b_0 \leq y \leq \bar{b}$; $\bar{a}_0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq b_0$;

$$-\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{(u-v) \left(\frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta} + \alpha_{\text{л}} \right) \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} a}{\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + \frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta} + \alpha_{\text{л}}} \quad (9)$$

при $x = \bar{a}_0$; $0 \leq y \leq \bar{b}_0$;

$$-\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{(u-v) \left(\frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta} + \alpha_{\text{л}} \right) \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} a}{\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + \frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta} + \alpha_{\text{л}}} \quad (10)$$

при $x = b_0$; $0 \leq x \leq 1$;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad (12)$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha a v \quad \text{при } x = 1; \quad (13)$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha a v \quad \text{при } y = \bar{b}; \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 \quad \text{при } t = 0; \\ v &= v_0 \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где u и v – безразмерные температуры в областях I и II соответственно.

В уравнениях (9), (10): $\delta_{\text{покр}} \neq 0$; $\delta \neq 0$.

При $\delta = 0$; $\delta_{\text{покр}} \neq 0$ их следует заменить на условия соответственно:

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = (u - v) \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} a;$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = (u - v) \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} a;$$

при $\delta_{\text{покр}} = 0$; $\delta \neq 0$ – на условия:

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = (u - v) \left(\frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta} + \alpha_{\text{л}} \right) a; \quad (16)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = (u - v) \left(\frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta} + \lambda_{\text{л}} \right) a; \quad (17)$$

наконец, при $\delta_{\text{покр}} = 0$ и $\delta = 0$ будем иметь:

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad u = v;$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad u = v.$$

Значения δ в равенствах (9), (10), (16), (17) определяются исходя из рассмотрения упругих деформаций формы.

В период фазового перехода уравнение (1) распадается на два, описывающие теплопроводность в жидкой и твердой фазах с добавлением условий на границе раздела фаз ξ :

$$\lambda_{1T} \text{grad}(T_1) \Big|_{\xi+0} - \lambda_{1ж} \text{grad}(T_1) \Big|_{\xi-0} = -\tilde{r} \tilde{\rho} \frac{d\xi}{dt}.$$

Вводя в рассмотрение δ -функцию и разрывные теплофизические коэффициенты, процесс фазового перехода можно описать с помощью одного уравнения

$$\rho_1 \left[c_1 + r \delta(T_1 - T_\phi) \right] \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \right), \quad (18)$$

где

$$\rho_1, c_1, \lambda_1 = \begin{cases} \rho_{1T}, c_{1T}, \lambda_{1T} & \text{при } T_1 < T_\phi; \\ \rho_{1ж}, c_{1ж}, \lambda_{1ж} & \text{при } T_1 > T_\phi. \end{cases}$$

Решение (18) производят путем сглаживания δ -функции и теплофизических коэффициентов, осуществляя замену фронта фазового перехода на некоторую его область ($T_\phi - \Delta$; $T_\phi + \Delta$).

Введем в области I и II общую прямоугольную сетку, равномерную по каждой из осей, причем предположим, что контактные поверхности $x = \bar{a}_0$ и $y = -\bar{b}_0$ лежат на узлах сетки. Пусть N_1 и N_2 – число узлов по горизонтали и вертикали соответственно, тогда шаг по горизонтали $h_1 = 1/N_1$, а по вертикали – $h_2 = \bar{b}/N_2$.

Предположим, что горизонтальная строка узлов на контактной поверхности имеет номер M_1 , а вертикальный столбец – M_2 . Будем решать задачу на фиктивной сетке с узлами:

$$x_i = \left(i + \frac{1}{2}\right)h_1; \quad y_j = \left(j + \frac{1}{2}\right)h_2$$

при $i = -1, 0, \dots, N_1$; $j = -1, 0, \dots, N_2$.

Неявные конечно-разностные уравнения, соответствующие выражениям (7)–(15), на узлах фиктивной сетки на шеститочечном шаблоне [1] в момент времени $t = (l+1)\tau$ имеют вид

$$\begin{aligned} a^2 c_{i,j}^{(1)} \rho_{i,j}^{(1)} \frac{u_{i,j}^{l+1} - u_{i,j}^l}{\tau} = & \frac{1}{h_1} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2},j}^{(1)} \frac{u_{i+1,j}^{l+1} - u_{i,j}^{l+1}}{h_1} - \lambda_{i-\frac{1}{2},j}^{(1)} \frac{u_{i,j}^{l+1} - u_{i-1,j}^{l+1}}{h_1} \right) + \\ & + \frac{1}{h_2} \left(\lambda_{i,j+\frac{1}{2}}^{(1)} \frac{u_{i,j+1}^{l+1} - u_{i,j}^{l+1}}{h_2} - \lambda_{i,j-\frac{1}{2}}^{(1)} \frac{u_{i,j}^{l+1} - u_{i,j-1}^{l+1}}{h_2} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots, M_1 - 1$; $j = 0, 1, 2, \dots, M_2 - 1$; $l = 0, 1, 2, \dots$;

$$\begin{aligned} a^2 c_{i,j}^{(2)} \rho_{i,j}^{(2)} \frac{v_{i,j}^{l+1} - v_{i,j}^l}{\tau} = & \frac{1}{h_1} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)} \frac{v_{i+1,j}^{l+1} - v_{i,j}^{l+1}}{h_1} - \lambda_{i-\frac{1}{2},j}^{(2)} \frac{v_{i,j}^{l+1} - v_{i-1,j}^{l+1}}{h_1} \right) + \\ & + \frac{1}{h_2} \left(\lambda_{i,j+\frac{1}{2}}^{(2)} \frac{v_{i,j+1}^{l+1} - v_{i,j}^{l+1}}{h_2} - \lambda_{i,j-\frac{1}{2}}^{(2)} \frac{v_{i,j}^{l+1} - v_{i,j-1}^{l+1}}{h_2} \right), \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} i = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1; \\ j = M_2, M_2 + 1, \dots, N_2, \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} i = M_1, M_1 + 1, \dots, N_1 - 1; \\ j = 0, 1, 2, \dots, M_2 - 1, \end{aligned} \right\} l = 0, 1, 2;$$

$$\begin{aligned}
-\lambda_{M_1-\frac{1}{2},j}^{(1)} \frac{u_{M_1,j}^{l+1} - u_{M_1,j-1}^{l+1}}{h_1} &= -\lambda_{M_1-\frac{1}{2},j}^{(2)} \frac{v_{M_1,j}^{l+1} - v_{M_1-1,j}^{l+1}}{h_1} = \\
&= \kappa_j \left(\frac{u_{M_1,j}^{l+1} + u_{M_1,j-1}^{l+1}}{2} - \frac{v_{M_1,j}^{l+1} + v_{M_1-1,j}^{l+1}}{2} \right),
\end{aligned} \tag{20}$$

где $j = -1, 0, 1, \dots, M_2 - 1$;

$$\begin{aligned}
-\lambda_{i,M_2-\frac{1}{2}}^{(1)} \frac{u_{i,M_2}^{l+1} - u_{i,M_2-1}^{l+1}}{h_2} &= -\lambda_{i,M_2-\frac{1}{2}}^{(2)} \frac{v_{i,M_2}^{l+1} - v_{i,M_2-1}^{l+1}}{h_2} = \\
&= \kappa_i \left(\frac{u_{i,M_2}^{l+1} + u_{i,M_2-1}^{l+1}}{2} - \frac{v_{i,M_2}^{l+1} + v_{i,M_2-1}^{l+1}}{2} \right),
\end{aligned} \tag{21}$$

где $i = -1, 0, 1, \dots, M_1 - 1$;

$$\kappa_j = \frac{\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} a \left(\frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta_j} + \alpha_{\text{л}_j} \right)}{\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + \frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta_{\text{в}}} + \alpha_{\text{л}_j}} \quad \text{при } \delta_{\text{покр}} \neq 0 \text{ и } \delta_{\text{в}} \neq 0; \tag{22}$$

$$\kappa_j = \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} a \quad \text{при } \delta_{\text{покр}} \neq 0, \quad \delta = 0;$$

$$\kappa_j = \frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta_j} + \alpha_{\text{л}_j} \quad \text{при } \delta_{\text{покр}} = 0, \quad \delta \neq 0.$$

Соответствующие формулы могут быть выписаны для κ_i . Величины $\alpha_{\text{л}_i}$ и $\alpha_{\text{л}_j}$ определяются по температуре в контакте на предыдущем временном слое

$$\begin{aligned}
\alpha_{\text{л}_i} &= \varepsilon_{1/2} \sigma T_0^3 \left[\left(\frac{u_{i,M_2}^l + u_{i,M_2-1}^l}{2} + 1 \right)^2 + (u_{\text{покр}_i} + 1)^2 \right] \times \\
&\times \left(\frac{u_{i,M_2}^l + u_{i,M_2-1}^l}{2} + u_{\text{покр}_i} + 2 \right),
\end{aligned} \tag{23}$$

где $u_{\text{покр}_i}$ – безразмерная температура наружной поверхности краски, определяется по формуле

$$u_{\text{покр},i} = \frac{\frac{v_{i,M_2}^l + v_{i,M_2-1}^l}{2} \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + \frac{u_{i,M_2}^l + u_{i,M_2-1}^l}{2} \left(\frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta_i} + \alpha_{\text{л},i} \right)}{\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + \frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta} + \alpha_{\text{л},i}}. \quad (24)$$

Уравнения (23), (24) следует рассматривать как трансцендентные для определения $\alpha_{\text{л},i}$, $u_{\text{покр},i}$, которые решаются методом половинного деления.

При $\delta_{\text{покр}} = 0$ выражение (23) следует заменить на

$$\alpha_{\text{л},i} = \varepsilon_{1/2} \sigma T_0^3 \left[\left(\frac{u_{i,M_2}^l + u_{i,M_2-1}^l}{2} + 1 \right)^2 + \left(\frac{v_{i,M_2}^l + v_{i,M_2-1}^l}{2} + 1 \right)^2 \right] \times \left(\frac{u_{i,M_2}^l + u_{i,M_2-1}^l}{2} + \frac{v_{i,M_2}^l + v_{i,M_2-1}^l}{2} + 2 \right). \quad (25)$$

Выражения для вычисления $\alpha_{\text{л},j}$, $u_{\text{покр},j}$ составляются по аналогии с (23)–(25). Вычисление δ_i и δ_j в (22)–(25) производится исходя из рассмотрения напряженного состояния формы. Оставаясь в рамках одномерного расчета напряжений, предполагаем, что δ изменяется по параболическому закону:

$$\delta_j = \delta_1^{\text{max}} \left[1 - \left(\frac{2j+1}{M_2 + N_2} \right)^2 \right];$$

$$\delta_i = \delta_2^{\text{max}} \left[1 - \left(\frac{2i+1}{M_1 + N_1} \right)^2 \right],$$

где δ_1^{max} и δ_2^{max} – деформации формы в точках $i = 0$; $j = M_2$; $i = M_1$; $j = 0$ соответственно.

Получаем:

$$\delta_2^{\text{max}} = -\frac{3}{2} \frac{\text{mom}_1 (2M_1 h_1)^2}{[(N_2 - M_2) h_2]^3 E};$$

$$\delta_1^{\text{max}} = -\frac{3}{2} \frac{\text{mom}_2 (2M_2 h_2)^2}{[(N_1 - M_1) h_1]^3 E},$$

где mom_1 и mom_2 – максимальные моменты изгиба в продольной и поперечной балках формы, определяются по формуле:

$$\text{mom}_1 = L \sum_{j=M_2}^{N_2} \varepsilon_j \left(j - \frac{M_2 + N_2}{2} \right) \sigma_j,$$

где $\varepsilon_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } j = M_2 \text{ или } j = N_2; \\ 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$

$$mom_2 = L \sum_{i=M_1}^{N_1} \varepsilon_i \left(i - \frac{M_1 + N_1}{2} \right) \sigma_i;$$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } i = M_1 \text{ или } i = N_1; \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где σ_i и σ_j – напряжения в сечениях балок по осям, определяемые так:

$$\begin{aligned} \sigma_i = & -\beta_i E \left[\left(\frac{v_{i,0} + v_{i,-1}}{2} + 1 \right) T_0 - T_{2_0} \right] + \frac{1}{N_1 - M_1} \sum_{i=M_1}^{N_1} \varepsilon_i \beta_i E \left[\left(\frac{v_{i,0} + v_{i,-1}}{2} + 1 \right) T_0 - T_{2_0} \right], \\ \sigma_j = & -\beta_j E \left[\left(\frac{v_{0,j} + v_{-1,j}}{2} + 1 \right) T_0 - T_{2_0} \right] + \\ & + \frac{1}{N_2 - M_2} \sum_{j=M_2}^{N_2} \varepsilon_j \beta_j E \left[\left(\frac{v_{0,j} + v_{-1,j}}{2} + 1 \right) T_0 - T_{2_0} \right], \end{aligned}$$

где β_i и β_j – коэффициенты температурного расширения материала, вычисляются по температурам $(v_{i,0} + v_{i,-1})/2$ и $(v_{0,j} + v_{-1,j})/2$ соответственно. При вычислении интегралов использовалась формула трапеций.

Действительные величины δ_j и δ_i считаются равными нулю, если соответствующие температуры плиты $(u_{i,M_2} - u_{i,M_2-1})/2$ и $(u_{M_1,j} + u_{M_1-1,j})/2$ больше или равны температуре затвердевания. В противном случае зазоры δ_j и δ_i определяются как остаточные деформации формы с использованием приведенных выше формул.

Аппроксимация остальных граничных условий и начальных условий запишется:

$$\left. \begin{aligned} u_{0,j}^{l+1} &= u_{-1,j}^{l+1} & \text{при } j = -1, 0, 1, \dots, M_2; \\ v_{0,j}^{l+1} &= v_{-1,j}^{l+1} & \text{при } j = M_2, M_2 + 1, \dots, N_2; \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{i,0}^{l+1} &= u_{i,-1}^{l+1} & \text{при } i = -1, 0, 1, \dots, M_1; \\ v_{i,0}^{l+1} &= v_{i,-1}^{l+1} & \text{при } i = M_1, M_1 + 1, \dots, N_1; \end{aligned} \right\}$$

$$-\lambda_{N_1 - \frac{1}{2}, j}^{(2)} \frac{v_{N_1, j}^{l+1} - v_{N_1 - 1, j}^{l+1}}{h_1} = \alpha_j a \frac{v_{N_1, j}^{l+1} + v_{N_1 - 1, j}^{l+1}}{2},$$

где $j = -1, 0, \dots, N_2$;

$$-\lambda_{i, N_2 - \frac{1}{2}}^{(2)} \frac{v_{i, N_2}^{l+1} - v_{i, N_2 - 1}^{l+1}}{h_2} = \alpha_i a \frac{v_{i, N_2}^{l+1} + v_{i, N_2 - 1}^{l+1}}{2}, \quad (27)$$

где $i = -1, 0, \dots, N_1$;

$$u_{i,j}^0 = u_0, \quad (28)$$

где $i = -1, 0, \dots, M_1$; $j = -1, 0, \dots, M_2$;

$$v_{i,j}^0 = v_0,$$

где $i = M_1, M_1 + 1, \dots, N_1$; $j = -1, 0, \dots, M_2$

или $i = -1, 0, \dots, N_1$; $j = M_2, M_2 + 1, \dots, N_2$.

Выражения (19)–(21), (26), (27) с учетом (28) дают $(N_1 + 2)(N_2 + 2) + 2(M_1 + M_2)$ алгебраических линейных уравнений для определения такого же количества неизвестных значений температур в узлах сетки. На каждом временном шаге $(\partial + 1)\tau$, $l = 0, 1, \dots$ их решение производится по методу продольно-поперечных направлений.

Представленная в данной работе математическая модель процессов нестационарной теплопроводности с учетом движущегося фронта фазовых превращений в быстротвердеющем гипсовом растворе использована для численного эксперимента и анализа полей температур и температурных напряжений гипсовых плит и металлических форм в процессе производства изделий.

ВЫВОД

Разработана математическая модель и приведено численное решение задачи нестационарной теплопроводности с движущимся фронтом затвердевания по сечению прямоугольной плиты из быстротвердеющей гипсовой смеси. С целью соблюдения высокой точности изделий учитываются температурные деформации металлической формы и усадка вяжущего материала в процессе затвердевания.

По результатам численного эксперимента могут быть определены характер распределения температур и профильных температурных напряжений по сечению плиты и формы.

Представленное решение задачи двумерного температурного поля с движущимся источником теплоты может быть использовано для определения оптимальных режимных параметров энергоэффективных процессов формирования плит различной геометрии из гипсовых смесей, пенополимерных и других композиционных материалов, обеспечивающих получение широкой номенклатуры стеновых и конструкционных материалов со специальными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е с ь м а н, Р. И. Расчеты процессов литья / Р. И. Есьман, Н. П. Жмакин, Л. И. Шуб. – Минск: Вышэйш. шк., 1977. – 264 с.

Представлена кафедрой
промышленной теплоэнергетики
и теплотехники

Поступила 3.03.2008