

4. Предложенные уравнения могут быть использованы для расчета и оценки неравномерности нагрева заготовок в вертикальных промышленных циклонных нагревательных устройствах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С а б у р о в, Э. Н. Циклонные нагревательные устройства с интенсифицированным конвективным теплообменом / Э. Н. Сабуров. – Архангельск: Сев.-Зап. кн. изд-во, 1995. – 341 с.

2. О с о б е н н о с т и обтекания и теплоотдачи цилиндра, смещенного с оси циклонного потока / Ю. Л. Леухин [и др.] // Проблемы энергетики... (Изв. высш. учеб. заведений). – 2008. – № 3–4. – С. 20–31.

3. Л е у х и н, Ю. Л. Особенности обтекания цилиндра, смещенного с аэродинамической оси циклонного потока / Ю. Л. Леухин, Э. Н. Сабуров, Д. В. Васильев // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 1999. – № 3. – С. 56–62.

Представлена кафедрой  
теплотехники № 14

Поступила 07.07.2008

УДК 621.1

## АНАЛИЗ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕД

Докт. техн. наук, проф. ЕСТЬМАН Р. И., БОНДАРЕНКО Ю. В.

*Белорусский национальный технический университет,  
ОДО «ЭНЭКА»*

Процессы распространения теплоты в сплошной среде подчиняются закону Фурье и описываются следующим дифференциальным уравнением теплопроводности, устанавливающим связь между пространственным и временным изменениями температуры тела:

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + f.$$

Для решения данного дифференциального уравнения необходимо знать распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (временные условия однозначности), геометрическую форму тела и закон теплового взаимодействия между поверхностью тела и окружающей средой (пространственные условия однозначности). Для анизотропных сред каждый характеризующий среду физический параметр – теплопроводность, плотность и теплоемкость – представляется в виде тензора второго ранга. Например, соотношение для тензора теплопроводности в декартовой системе координат имеет вид [1]

$$\begin{pmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} & \kappa_{yz} \\ \kappa_{zx} & \kappa_{zy} & \kappa_{zz} \end{pmatrix}.$$

Тогда дифференциальное уравнение теплопроводности в обобщенных координатах переписывается в следующем виде:

$$c(x_i)\rho(x_i)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \kappa_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + f(x_i).$$

Решение уравнения теплопроводности определяется с точностью до некоторой произвольной функции. Для устранения произвольности задаются краевые условия, включающие начальные и граничные условия. Рассмотрим постановку краевых условий при определении температурного поля цилиндрического тела

$$\Phi = \Omega T = (\{x_i\} \in \Omega, t \in T).$$

Краевые условия на основаниях цилиндра соответствуют начальным условиям при  $t = 0$  или  $t = t_0$  на границе цилиндра,  $\partial\Omega$  – граничным условиям. Более сложные условия могут определяться в произвольном сечении цилиндра. В случае учета конечности распространения теплоты в среде необходимо задавать два условия по времени для гиперболического уравнения теплопроводности.

Для численного решения уравнений необходимо выполнение следующих корректно поставленных условий [2]:

- решение задачи существует;
- решение единственное;
- решение непрерывно зависит от коэффициентов в уравнении, граничных и начальных условий.

Рассмотрим граничные и начальные условия для уравнения теплопроводности. При численном решении задачи будем использовать сетку с границей вдоль оси  $y$  в ортогональной системе координат (рис. 1).

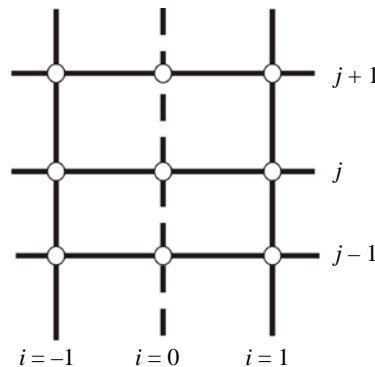


Рис. 1. Пространственный шаблон на границе сред

Среди граничных условий для уравнения теплопроводности выделяют четыре основных.

Граничные условия первого рода (условие Дирихле) состоят в задании температурного поля на границе цилиндра  $\partial\Omega$

$$T(x_{0i}, t) = \tau(x_{0i}, t), (x_{0i}) \in \partial\Omega.$$

Для приближенного представления на сетке имеем

$$T_0^j = T_{-1}^j = \tau_0.$$

Граничные условия второго рода (условия Неймана) состоят в задании теплового потока на границе цилиндра  $\partial\Omega$ .

Для изотропной среды:

$$\kappa \frac{\partial T(x_{0i}, t)}{\partial n} = q(x_{0i}, t), (x_{0i}) \in \partial\Omega;$$

$$\kappa \frac{T_0^j - T_{-1}^j}{h_x} = q_0,$$

где  $h_x$  – шаг сетки вдоль оси  $X$ .

Для анизотропной среды

$$\kappa_{ij} \frac{\partial T(x_{0i}, t)}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = q(x_{0i}, t), (x_{0i}) \in \partial\Omega.$$

Для двумерного случая в ортогональной системе координат:

$$\kappa_{xx} \frac{T_{-1}^j - T_0^j}{h_x} + \kappa_{xy} \frac{T_0^{j-1} - T_0^j}{h_y} = q_{0x};$$

$$\kappa_{yx} \frac{T_{-1}^j - T_0^j}{h_x} + \kappa_{yy} \frac{T_0^{j-1} - T_0^j}{h_y} = q_{0y},$$

где  $h_x, h_y$  – шаг сетки вдоль осей.

Граничные условия третьего рода характеризуют закон конвективного теплообмена на границе цилиндра  $\partial\Omega$ .

Для изотропной среды

$$\kappa \frac{\partial T(x_{0i}, t)}{\partial n} + \alpha(T - T_c) = 0, (x_{0i}) \in \partial\Omega.$$

Для анизотропной среды

$$\kappa \frac{T_0^j - T_{-1}^j}{h_x} + \alpha(T_0^j - T_c) = 0.$$

Для двумерного случая анизотропной среды:

$$\kappa_{xx} \frac{T_0^j - T_{-1}^j}{h_x} + \kappa_{xy} \frac{T_0^{j-1} - T_0^j}{h_y} + \alpha(T_0^j - T_c) = 0;$$

$$\kappa_{yx} \frac{T_0^j - T_1^j}{h_x} + \kappa_{yy} \frac{T_0^{j-1} - T_0^j}{h_y} + \alpha(T_0^j - T_c) = 0.$$

Граничные условия четвертого рода характеризуют условия сопряженности сред в случае нестационарного температурного поля.

В случае теплового контакта двух сред необходимо задавать условия сопряженности на границе контакта. Для идеального контакта двух сред выполняются следующие условия сопряженности:

- непрерывность температуры:

$$T - T_0 = 0;$$

$$T_{-1}^j - T_0^j = 0;$$

- непрерывность теплового потока:

$$\kappa \frac{\partial T(x_{0i}, t)}{\partial n} = \kappa_0 \frac{\partial T_0(x_{0i}, t)}{\partial n};$$

$$\kappa \frac{T_0^j - T_{-1}^j}{h_x} = \kappa \frac{T_1^j - T_0^j}{h_x}.$$

В ряде случаев тепловой контакт сопровождается радиационно-конвективным теплообменом на границах раздела сред и приходится решать сопряженную задачу.

Граничные условия с учетом теплового излучения в приближении абсолютно черного тела и с учетом конвективного теплообмена на границе раздела сред (твердое тело – жидкость, тело – тело, жидкость – жидкость) формулируются следующим образом:

$$\kappa \frac{\partial T(x_{0i}, t)}{\partial n} + \alpha(T - T_c) + \sigma(T - T_c)^4 = 0, (x_{0i}) \in \partial\Omega.$$

Для изотропной среды

$$\kappa \frac{T_0^j - T_1^j}{h_x} + \alpha(T_0^j - T_c) + \sigma(T_0^j - T_c)^4 = 0.$$

Для двумерного случая анизотропной среды:

$$\kappa_{xx} \frac{T_0^j - T_1^j}{h_x} + \kappa_{yy} \frac{T_0^{j-1} - T_0^j}{h_y} + \alpha(T_0^j - T_c) + \sigma(T_0^j - T_c)^4 = 0;$$

$$\kappa_{yx} \frac{T_0^j - T_1^j}{h_x} + \kappa_{yy} \frac{T_0^{j-1} - T_0^j}{h_y} + \alpha(T_0^j - T_c) + \sigma(T_0^j - T_c)^4 = 0.$$

В случае фазовых превращений граничные условия на границе раздела фаз описываются условиями Стефана [3]:

$$T - T_0 = 0;$$

$$T_{-1}^j - T_0^j = 0;$$

$$\kappa \frac{\partial T(x_{0i}, t)}{\partial n} - \kappa_0 \frac{\partial T_0(x_{0i}, t)}{\partial n} = -E v_n;$$

$$\kappa \frac{T_0^j - T_{-1}^j}{h_x} - \kappa \frac{T_1^j - T_0^j}{h_x} = -E v_n,$$

где  $v_n = \frac{d\xi}{dt}$  – скорость движения границы раздела фаз;  $E$  – энтальпия фазового перехода.

При изменении фазового состояния вещества могут меняться не только теплофизические характеристики, но и, например, оптические. В таком случае могут изменяться условия сопряженности на границах сред. Например, при изменении прозрачности среды теплообмен будет осуществляться не только через контакт, но и посредством излучения через прозрачную стенку:

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial n} + \kappa_2 \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial n} + \sigma(T_1 - T_3)^4 = 0, (x_i) \in \partial\Omega;$$

$$\kappa_1 \frac{\widehat{T}_0^j - \widehat{T}_{-1}^j}{h_x} + \kappa_2 \frac{\widetilde{T}_1^j - \widetilde{T}_0^j}{h_x} + \sigma(\widehat{T}_0^j - \widetilde{T}_n^j)^4 = 0.$$

## ВЫВОД

Проведен анализ начальных и граничных условий для нестационарного уравнения теплопроводности в случае изотропной и анизотропной сред. Особое внимание уделяется нелинейным граничным условиям, обусловленным фазовыми превращениями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у, Л. Д. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2003. – Т. 7. – 247 с.
2. С а м а р с к и й, А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
3. П о л я н и н, А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – М.: Физматлит, 2005. – 256 с.

Представлена кафедрой  
промтеплоэнергетики и теплотехники

Поступила 06.06.2008