https://doi.org/10.21122/1029-7448-2019-62-5-413-421

УДК 517.958:519.6

# Применение полилогарифмов к приближенному решению неоднородного телеграфного уравнения для линии без искажений

**П. Г. Ласый[1], И. Н. Мелешко[1]**

[1]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)



**Реферат.** В статье рассматривается смешанная задача для хорошо известного в электротехнике и электронике телеграфного уравнения при условии, что линия свободна от искажений. Эта задача сводится к аналогичной для одномерного неоднородного волнового уравнения. Ее решение можно найти как сумму решения смешанной задачи с однородными краевыми условиями для соответствующего однородного волнового уравнения и решения неоднородного волнового уравнения с однородными краевыми и нулевыми начальными условиями. Решения обеих задач можно отыскать методом разделения переменных в виде ряда по тригонометрическим функциям точки линии с коэффициентами, зависящими от времени. Такие решения неудобны для реального применения, поскольку требуют вычисления большого числа интегралов и трудно оценить погрешность их вычислений. Предлагается альтернативный способ решения этой задачи, основанный на использовании специальных функций – полилогарифмов, которые представляют собой комплексные степенные ряды со степенными же коэффициентами, сходящиеся в единичном круге. Точное решение задачи выражается в интегральной форме через мнимую часть полилогарифма первого порядка на единичной окружности, а приближенное – в виде конечной суммы через действительную часть дилогарифма и мнимую часть полилогарифма третьего порядка. Все указанные части полилогарифмов являются периодическими функциями, имеющими полиномиальные выражения соответствующих степеней на отрезке длиной в период. Это позволяет эффективно находить приближенное решение задачи. Также найдена простая и удобная оценка погрешности приближенного решения задачи. Она линейна относительно шага разбиения линии и шага разбиения временно́го диапазона, на котором рассматривается задача. Оценка является равномерной по длине линии в каждый фиксированный момент времени. Приведен конкретный пример решения задачи разработанным способом, построены графики точного и приближенного решений.

**Ключевые слова:** телеграфное уравнение, волновое уравнение, смешанная задача, приближенное решение, оценка погрешности, полилогарифм

**Для цитирования:** Ласый, П. Г. Применение полилогарифмов к приближенному решению неоднородного телеграфного уравнения для линии без искажений / П. Г. Ласый, И. Н. Мелешко // *Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ.* 2019. Т. 62. № 5. С. 413–421. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2019-62-5-413-421

| **Адрес для переписки** | **Address for correspondence** |
|---|---|
| Ласый Петр Григорьевич | Lasy Petr G. |
| Белорусский национальный технический университет | Belarusian National Technical University |
| ул. Я. Коласа, 12, | 12 Ya. Kolasa str., |
| 220013, г. Минск, Республика Беларусь | 220013, Minsk, Republic of Belarus |
| Тел.: +375 17 292-82-73 | Tel.: +375 17 292-82-73 |
| kafvm2@bntu.by | kafvm2@bntu.by |

# Application of Polylogarithms to the Approximate Solution of the Inhomogeneous Telegraph Equation for the Distortionless Line

**P. G. Lasy[1], I. N. Meleshko[1]**

[1]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

**Abstract.** The paper deals with a mixed problem for the telegraph equation well-known in electrical engineering and electronics, provided that the line is free from distortion. This problem is reduced to the analogous one for the one-dimensional inhomogeneous wave equation. Its solution can be found as the sum of the solution for a mixed homogeneous boundary value problem for the corresponding homogeneous wave equation and for the solution of a non-homogeneous wave equation with homogeneous boundary data and zero initial conditions. Solutions to both problems can be found by separating the variables in the form of a series of trigonometric functions of the line point with time-dependent coefficients. Such solutions are inconvenient for real application because they require calculation of a large number of integrals, and it is difficult to estimate the miscalculation. An alternative method for solving this problem is proposed, based on the use of special functions, viz. polylogarithms, which are complex power-series with power coefficients converging in a unit circle. The exact solution of the problem is expressed in the integral form via the imaginary part of the first-order polylogarithm on the unit circle, and the approximate one is expressed in the form of a finite sum via the real part of the dilogarithm and the imaginary part of the third-order polylogarithm. All these parts of the polylogarithms are periodic functions that have polynomial expressions of the corresponding powers on the segment of the length equal to the period. This makes it possible to effectively find an approximate solution to the problem. Also, a simple and convenient error estimate of the approximate solution of the problem is found. It is linear with respect to the step of splitting the line and the step of splitting the time range in which the problem is considered. The score is uniform along the length of the line at each fixed point of time. A concrete example of solving the problem according to the proposed mode is presented; graphs of exact and approximate solutions are constructed.

**Keywords:** telegraph equation, wave equation, mixed problem, approximate solution, error estimation, polylogarithm

**For citation:** Lasy P. G., Meleshko I. N. (2019) Application of Polylogarithms to the Approximate Solution of the Inhomogeneous Telegraph Equation for the Distortionless Line. *Energetika. Proc. CIS Higher Educ. Inst. and Power Eng. Assoc.* 62 (5), 413–421. https://doi.org/10. 21122/1029-7448-2019-62-5-413-421 (in Russian)

## Введение

Электромагнитное поле, возникающее вокруг проводника при прохождении по нему электрического тока, вызывает колебания напряжения и силы тока.

Пусть ось $Ox$ совпадает с осью прямолинейного проводника длиной $l$, а один из его концов примем за начало отсчета. Известно [1–6], что величины разности потенциалов и силы тока в любой точке $x \in [0, l]$ проводника в любой момент времени $t \geq 0$ являются решениями телеграфного уравнения

$$\partial_{xx} w = LC\partial_{tt} w + (RC + GL)\partial_t w + GR\, w, \tag{1}$$

где $w = w(x, t)$ – неизвестная функция (сила тока или разность потенциалов); $L$, $C$, $R$, $G$ – величина самоиндукции, емкости, сопротивления и проводимости изоляции соответственно, рассчитанные на единицу длины линии.

Уравнение (1) имеет многочисленные приложения в электротехнике и электронике, с которыми можно ознакомиться, например, в [1, 7–9]. Для того чтобы решение (1) существовало и было единственным, должны быть заданы начальные и краевые условия. Такая задача называется смешанной.

Если рассматриваемая линия не имеет искажений, т. е.

$$\frac{R}{L}=\frac{G}{C}=\sigma,$$

то телеграфное уравнение заменой искомой функции $w=\exp(-\sigma t)u$ приводится к одномерному однородному волновому уравнению

$$\partial_{tt}u=a^2\partial_{xx}u, \tag{2}$$

где $a=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ – скорость распространения волн напряжения и силы тока, возникающих в линии.

**Основная часть**

Решение смешанной задачи с неоднородными, т. е. ненулевыми, краевыми условиями для (2) сводится к аналогичной задаче с однородными краевыми условиями для неоднородного волнового уравнения. Эту последнюю задачу мы и рассмотрим.

Требуется найти решение уравнения

$$\partial_{tt}u=a^2\partial_{xx}u+q(x,t) \tag{3}$$

в прямоугольнике $\Pi=\{(x,t)\,|\,x\in[0,l],\,t\in[0,T]\},T\geq 0$ при заданных начальных

$$u(x,0)=f(x),\ \partial_t u(x,0)=F(x),\ x\in[0,l] \tag{4}$$

и краевых условиях первого рода

$$u(0,t)=\varphi_0(t),\ \ u(l,t)=\varphi_l(t),\ \ t\in[0,T]. \tag{5}$$

Наложим ограничения на известные функции $q(x, t)$, $f(x)$, $F(x)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_l(t)$. Функцию $q(x,t)$ будем считать удовлетворяющей условию Липшица в прямоугольнике П, т. е. существует положительная постоянная $L>0$ такая, что для любых двух точек данного прямоугольника выполняется неравенство

$$|\,q(x_1,t_1)-q(x_2,t_2)\,|\leq L(|\,x_1-x_2\,|+|\,t_1-t_2\,|).$$

Коротко этот факт будем записывать следующим образом:

$$q(x,t)\in \mathrm{Lip}(L,\Pi).$$

Далее функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[0, l]$

$$f'(x)\in \mathrm{Lip}(L_1,[0,l]);\ \ F(x)\in \mathrm{Lip}(L_2,[0,l]).$$

Функции $\varphi_0(t)$ и $\varphi_l(t)$ дважды дифференцируемы на отрезке [0, $T$]

$$\varphi_0''(t) \in \mathrm{Lip}(L_0,[0,T]);\ \ \varphi_l''(t) \in \mathrm{Lip}(L_l,[0,T]).$$

Проведем в уравнении (3) подстановку

$$u = v + \varphi(x,\, t) \tag{6}$$

с функцией $\varphi(x,t) = \varphi_0(t) + l^{-1}x(\varphi_l(t) - \varphi_0(t))$.

В результате получим также неоднородное волновое уравнение

$$\partial_{tt} v = a^2 \partial_{xx} v + q_1(x,t), \tag{7}$$

где $q_1(x,\, t) = q(x,\, t) - \partial_{tt}\varphi(x,\, t)$.

Несложно проверить, что $q_1(x,\, t) \in \mathrm{Lip}(L_3,\, \Pi)$, причем $L_3 = L + 2L_0 + L_l + l^{-1}M$, $M = \max\limits_{t\in[0,T]} |\varphi_0''(t) - \varphi_l''(t)|$.

Начальные условия принимают вид:

$$v(x,0) = f_1(x);\ \partial_t(x,0) = F_1(x) \tag{8}$$

с функциями $f_1(x) = f(x) - \varphi(x,0)$, $f_1'(x) \in \mathrm{Lip}(L_1,[0,l])$, $F_1(x) = F(x) - \partial_t\varphi(x,0) \in \mathrm{Lip}(\tilde{L}_2,[0,l])$, где $\tilde{L}_2 = L_2 + l^{-1}|\varphi_0'(0) - \varphi_l'(0)|$.

Краевые условия, ввиду подстановки (6), становятся однородными:

$$v(0,t) = 0;\ v(l,t) = 0;\ t \in [0,T]. \tag{9}$$

Решение смешанной задачи (7)–(9) можно найти, следуя [2]:

$$v(x,t) = \bar{v}(x,t) + v^*(x,t), \tag{10}$$

где $\bar{v}(x,t)$ – решение смешанных задач (8), (9) для однородного волнового уравнения

$$\partial_{tt} v = a^2 \partial_{xx} v; \tag{11}$$

$v^*(x,t)$ – решение неоднородного уравнения (7) при нулевых начальных и краевых условиях.

В [10], используя полилогарифмы [11, 12], точное решение задач (8), (9) для уравнения (11) представлено в виде

$$\bar{v}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \sum_{k=1}^{2} (f_1'(y) + (-1)^{k+1} a^{-1} F_1(y)) P_k(x,t,y)\,dy, \tag{12}$$

где при $k = 1$ или $k = 2$ $P_k(x,t,y) = (-1)^{k+1}(N^1(\omega(at + (-1)^{k+1}x + (-1)^k y)) - N^1(\omega(at + (-1)^k x + (-1)^k y)))$; $\omega = \dfrac{\pi}{l}$; $N^1(x)$ – мнимая часть полилогарифма первого порядка на единичной окружности

$$N^1(x) = \mathrm{Im}\, L^1(\exp(ix)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k},\ x \in R. \tag{13}$$

Там же найдено и удобное для вычислений приближенное решение

$$\overline{v}_n(x,t)=\frac{l}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{2}\Big(f_1'\big(x_{k-0,5}\big)+(-1)^{s+1}a^{-1}F_1\big(x_{k-0,5}\big)\Big)Q_s(x,t,y)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k}, \qquad (14)$$

где при фиксированном натуральном $n$ и $s=1$ или $s=2$ $x_0 = 0$; $x_k = k\overline{h}$; $\overline{h}=l/n$; $x_{k-0,5}=x_{k-1}+0,5\overline{h}$; $k=\overline{1,n}$; $Q_s(x,t,y)=M^2(\omega(at+(-1)^{s+1}x+(-1)^s y))-$ $-M^2(\omega(at+(-1)^s x+(-1)^s y))$; $M^2(x)$ – действительная часть дилогарифма на единичной окружности

$$M^2(x)=\operatorname{Re}L^2(\exp(ix))=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2},\ x\in R.$$

Абсолютная величина погрешности вычисления решения (12) по формуле (14) оценивается величиной

$$\frac{l\big(aL_1+\tilde{L}_2\big)}{2a}\overline{h}. \qquad (15)$$

То есть погрешность равномерна по $x\in[0,l]$, $t\geq 0$ и имеет первый порядок малости относительно шага $\overline{h}$ разбиения отрезка [0, $l$].

Выразим теперь решение $v^*(x,t)$ уравнения (7) через полилогарифмы. В [2] оно записано в виде

$$v^*(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin k\omega x, \qquad (16)$$

где при любом натуральном $k$

$$T_k(t)=\frac{2}{k\pi a}\iint_{\Pi_{lt}}q_1(y,s)\sin k\omega a(t-s)\cdot\sin k\omega y\,dyds \qquad (17)$$

и интегрирование ведется по прямоугольнику $\Pi_{lt}=\{(y,s)\,|\,y\in[0,l],$ $s\in[0,t]\}$

Подставив выражение (17) в (16), выполнив несложные преобразования и учитывая (13), получим:

$$v^*(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\iint_{\Pi_{lt}}q_1(y,s)P(x,t,y,s)\,dyds, \qquad (18)$$

где $P(x,t,y,s)=\sum_{k=1}^{4}(-1)^k N^1(\omega(a(t-s)+(-1)^{[(k-1)/2]}x+(-1)^{[k/2]}y))$; через $[\cdot]$ обозначена целая часть действительного числа.

Отыщем приближенное выражение для решения $v^*(x,t)$. Набросим на прямоугольник $\Pi_{lt}$ сетку с узлами в точках $(x_{k_1},t_{k_2})$, где $x_{k_1}=k_1h^*$, $k_1=\overline{0,n_l}$, $t_{k_2}=k_2\tau^*$, $k_2=\overline{0,n_t}$; $h^*=l/n_l$, $\tau^*=t/n_t$ – шаги сетки по переменным $x$ и $t$ соответственно. Далее заменим в (18) под знаком интеграла в каждом из $n_l n_t$ прямоугольников $\Pi_{k_1k_2} = \left\{(y,s) \mid x_{k_1-1} \le y \le x_{k_1},\ t_{k_2-1} \le s \le x_{k_2}\right\}$ функцию $q_1(x,t)$ ее значением в средней точке $\left(x_{k_1-0,5}, t_{k_2-0,5}\right)$, где $x_{k_1-0,5} = x_{k_1-1} + 0,5h^*$, $k_1 = \overline{1,n_l}$, $t_{k_2-0,5} = t_{k_2-1} + 0,5\tau^*$, $k_2 = \overline{1,n_t}$.

В результате получим

$$v^*(x,t) \approx v^*_{n_l n_t}(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \sum_{k_1=1}^{n_l} \sum_{k_2=1}^{n_t} q_1\left(x_{k_1-0,5}, t_{k_2-0,5}\right) \iint\limits_{\Pi_{k_1k_2}} P(x,t,y,s)dyds. \quad (19)$$

Поскольку первообразными для функций $N^1(x)$ и $M^2(x)$ являются соответственно функции $-M^2(x)$ и $N^3(x)$, причем $N^3(x)$ = Im$L^3$(exp($ix$) = $= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}$, $x \in R$ – мнимая часть полилогарифма третьего порядка на единичной окружности, то

$$\iint\limits_{\Pi_{k_1k_2}} P(x,t,y,s)dyds = \frac{1}{a\omega^2} Q_{k_1k_2}(x,t),$$

где $Q_{k_1k_2}(x,t) = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{k+[k/2]} N^3(\omega(a(t-s) + (-1)^{[(k-1)/2]} x + (-1)^{[k/2]} y)) \Big|_{x_{k_1-1}}^{x_{k_1}} \Big|_{t_{k_2-1}}^{t_{k_2}}$.

Следовательно, приближенным значением для функции $v^*(x,t)$ служит выражение $v^*_{n_l n_t}(x,t)$, вычисляемое по формуле

$$v^*_{n_l n_t}(x,t) = \frac{1}{2\pi a^2 \omega^2} \sum_{k_1=1}^{n_l} \sum_{k_2=1}^{n_t} q_1(x_{k_1-0,5}, t_{k_2-0,5}) Q_{k_1k_2}(x,t). \quad (20)$$

Найдем оценку абсолютной погрешности вычисления решения (18) по формуле (20). Из (18) и (19) следует, что

$$v^*(x,t) - v^*_{n_l n_t}(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \sum_{k_1=1}^{n_l} \sum_{k_2=1}^{n_t} \iint\limits_{\Pi_{k_1k_2}} (q_1(y,s) - q_1(x_{k_1-0,5}, t_{k_2-0,5})) P(x,t,y,s)dyds.$$

Нечетная периодическая функция $N^1(x)$ на промежутке $(0,\pi]$ имеет выражение $N^1(x) = 0,5(\pi - x)$ и, значит, $|N^1(x)| < 0,5\pi$ для всех $x \in R$. Следовательно, при всех $x, t, y, s$

$$|P(x,t,y,s)| < 2\pi.$$

Учитывая это неравенство и тот факт, что $q_1(x,t) \in \mathrm{Lip}(L_3, \Pi)$, получаем:

$$|v^*(x,t) - v^*_{n_l n_t}(x,t)| \le \frac{1}{2\pi a} \sum_{k_1=1}^{n_l} \sum_{k_2=1}^{n_t} \iint\limits_{\Pi_{k_1k_2}} |q_1(y,s) -$$

$$-q_1(x_{k_1-0,5},t_{k_2-0,5})||P(x,t,y,s)|dyds \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi a}\sum_{k_1=1}^{n_l}\sum_{k_2=1}^{n_t}\iint_{\Pi_{k_1k_2}} L_3(|y-x_{k_1-0,5}|+|s-t_{k_2-0,5}|)|2\pi dyds \le$$

$$\le \frac{L_3}{a}\sum_{k_1=1}^{n_l}\sum_{k_2=1}^{n_t}\iint_{\Pi_{k_1k_2}}(0,5h^*+0,5\tau^*)dyds=\frac{L_3lt}{2a}(h^*+\tau^*).$$

Таким образом, в прямоугольнике $\Pi$ имеет место следующая оценка погрешности вычисления решения $v^*(x,t)$ уравнения (7):

$$|v^*(x,t)-v^*_{n_ln_t}(x,t)|\le\frac{L_3lt}{2a}(h^*+\tau^*). \tag{21}$$

Проведем теперь сборку решения поставленной задачи (3)–(5). Принимая во внимание (6) и (10), точное решение находится по формуле

$$u(x,t)=\overline{v}(x,t)+v^*(x,t)+\varphi(x,t), \tag{22}$$

где $\overline{v}(x,t)$, $v^*(x,t)$ – находятся по (12) и (18), а приближенное – по формуле

$$u_{nn_ln_t}(x,t)=\overline{v}_n(x,t)+v^*_{n_ln_t}(x,t)+\varphi(x,t), \tag{23}$$

в которой функции $\overline{v}_n(x,t)$ и $v^*_{n_ln_t}(x,t)$ имеют, соответственно, выражения (14) и (20).

Из (15) и (21) следует общая оценка погрешности решения задачи

$$|u(x,t)-u_{nn_ln_t}(x,t)|\le\frac{l}{2a}\Big((aL_1+\tilde{L}_2)\overline{h}+L_3t(h^*+\tau^*)\Big).$$

Проведенные исследования позволяют сформулировать следующее утверждение.

**Теорема.** *При указанных выше предположениях относительно функций* $q(x,t)$, $f(x)$, $F(x)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_l(t)$ *точное решение смешанной краевой задачи (4), (5) для неоднородного волнового уравнения (3) находится с помощью полилогарифма первого порядка по формуле (22), а приближенное – с помощью дилогарифма и полилогарифма третьего порядка по (23). Абсолютная погрешность вычисления оценивается величиной*

$$\frac{l}{2a}\Big((aL_1+\tilde{L}_2)\overline{h}+L_3t(h^*+\tau^*)\Big).$$

*То есть она линейна по шагам* $\overline{h}$ *и* $h^*$ *разбиения отрезка* $[0,l]$ *и шагу* $\tau^*$ *разбиения отрезка* $[0,t]$. *Кроме того, эта оценка является равномерной по* $x\in[0,l]$ *при каждом фиксированном* $t\in[0,T]$.

Следует заметить, что, несмотря на кажущуюся громоздкость формул (14), (20), (23), они достаточно эффективны, так как использующиеся в вычислениях функции $M^2(x)$ и $N^3(x)$ являются элементарными, а именно:

$$M^2(x)=\frac{(\pi-|x|)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12};\ N^3(x)=\frac{1}{12}x(\pi-|x|)(2\pi-|x|),\ x\in[-\pi,\pi]. \tag{24}$$

Для вычисления значений этих функций в произвольной точке $x \in R$ следует, учитывая их периодичность с периодом $2\pi$, заменить в формулах (24) $x$ на $\alpha(x)$, где

$$\alpha(x) = \operatorname{sign}(x)\left(|x| - 2\pi\left[\frac{x}{2\pi}\right]\right), \quad \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} x^{-1}|x|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

**Пример.** Найти решение неоднородного волнового уравнения

$$\partial_{tt}u = 9\partial_{xx}u + 40\pi(\pi(36x^2 - 1)\sin 2\pi(x^2 + t) - 9\cos 2\pi(x^2 + t))$$

при начальных $u(x,0) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + 10\sin 2\pi x^2$, $\partial_t u(x,0) = 2x - 1 + 20\pi\cos 2\pi x^2$, $x \in [0,\ 1]$ и краевых $u(0,t) = 9t^2 - t + \frac{1}{16} + 10\sin 2\pi t$, $u(1,t) = 9t^2 + t + \frac{9}{16} +$ $+ 10\sin 2\pi(t + 1)$, $t \geq 0$ условиях.

Точным решением этой задачи является функция

$$u(x,t) = x^2 + 9t^2 + 2xt - \frac{1}{2}x - t + \frac{1}{16} + 10\sin 2\pi(x^2 + t).$$

Вычисление приближенного решения задачи по формуле (23) в квадрате $\{(x,t) \mid x \in [0,1],\ t \in [0,1]\}$ при $n = n_l = n_t = 100$ дает максимальную погрешность, не превышающую 0,026, что является вполне приемлемым для данной сетки с суммой шагов $\overline{h} + h^* + \tau^* = 0{,}03$. Графики точного $u(x,t)$ и приближенного $\widetilde{u}(x,t) = u_{100,100,100}(x,t)$ решений данной задачи представлены на рис. 1.

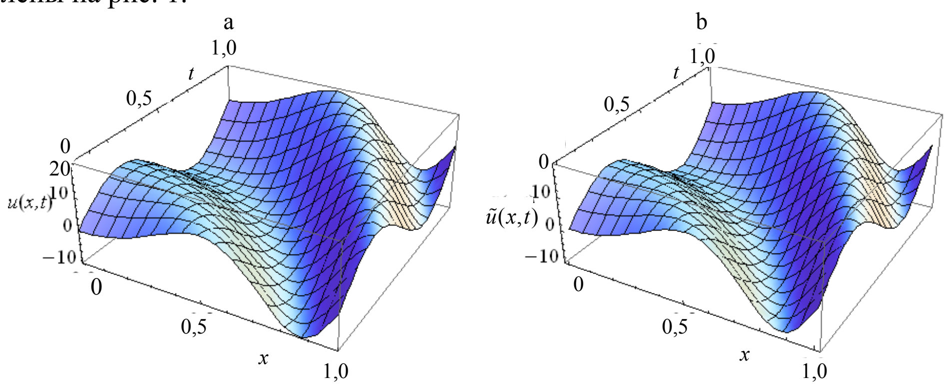


*Рис. 1.* Графики решений:
a – точного $u(x,\ t)$; b – приближенного $\tilde{u}(x,\ t) = u_{100,100,100}(x,\ t)$

*Fig. 1.* The graphics of the solutions:
a – of exact one $u(x,\ t)$; b – of approximate one $\tilde{u}(x,\ t) = u_{100.100.100}(x,\ t)$

## ВЫВОД

С использованием полилогарифмов первого–третьего порядков найдены точное и приближенное решения телеграфного уравнения для линии без искажений при произвольных начальных и граничных условиях. Получена равномерная по длине линии оценка погрешности приближенного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анго, А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. М.: Наука, 1964. 772 с.
2. Кошляков, Н. С. Дифференциальные уравнения математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. М.: ГИФМЛ, 1962. 767 с.
3. Араманович, И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. М.: Наука, 1969. 288 с.
4. Смирнов, В. И. Курс высшей математики: в 5 т. / В. И. Смирнов. М.: Наука, 1974. Т. 2. 479 с.
5. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. СПб.: Лань, 2007. 688 с.
6. Остапенко, В. Телеграфное уравнение. Краевые задачи / В. Остапенко. Саарбрюккен: LAP Lambert Academic Publishing, 2012. 272 с.
7. Новиков, Ю. Н. Электротехника и электроника. Теория цепей и сигналов, методы анализа / Ю. Н. Новиков. СПб.: Питер, 2005. 384 с.
8. Бычков, Ю. А. Основы теории электрических цепей / Ю. А. Бычков, В. М. Золотницкий, Э. П. Чернышев. СПб.: Лань, 2002. 464 с.
9. Дубнищев, Ю. Н. Колебания и волны / Ю. Н. Дубнищев. СПб.: Лань, 2011. 384 с.
10. Ласый, П. Г. Приближенное решение одной задачи об электрических колебаниях в проводах с помощью полилогарифмов / П. Г. Ласый, И. Н. Мелешко // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. 2017. Т. 60, № 4. С. 334–340. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2017-60-4-334-340.
11. Пыхтеев, Г. Н. Полилогарифмы, их свойства и методы вычисления / Г. Н. Пыхтеев, И. Н. Мелешко. Минск: Изд-во БГУ, 1976. 68 с.
12. Мелешко, И. Н. Специальные формулы для интегралов типа Коши и их приложения / И. Н. Мелешко. Минск: ВУЗ-ЮНИТИ, 1999. 197 с.

Поступила 26.03.2019 Подписана в печать 04.06.2019 Опубликована онлайн 30.09.2019

REFERENCES

1. Ango A. (1964) *Mathematics for Electrical and Radio Engineers*. Moscow, Nauka Publ. 772 (in Russian).
2. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. (1962) *Differential Equations of Mathematical Physics*. Moscow, State Publishing House of Physical and Mathematical Literature. 767 (in Russian).
3. Aramanovich I. G., Levin V. I. (1969) *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Nauka Publ. 288 (in Russian).
4. Smirnov V. I. (1974) *Learning Course of Higher Mathematics. Vol. 2.* Moscow, Nauka Publ. 479 (in Russian).
5. Myshkis A. D. (2007) *Lectures on Higher Mathematics*. Saint-Petersburg, Lan' Publ. 688 (in Russian).
6. Ostapenko V. (2012) *Telegraph Equation. Boundary Value Problems*. Saarbrücken, Lambert Academic Publishing. 272 (in Russian).
7. Novikov Yu. N. (2005) *Electrical Engineering and Electronics. Theory of Circuits and Signals, Methods of Analysis*. Saint-Petersburg, Piter Publ. 384 (in Russian).
8. Bychkov Yu., A., Zolotnitskii V. M., Chernyshev E. P. (2002) *Fundamentals of the Theory of Electrical Circuits*. Saint-Petersburg, Lan' Publ. 464 (in Russian).
9. Dubnishchev Yu. N. (2011) *Oscillations and Waves*. Saint-Petersburg, Lan' Publ. 384 (in Russian).
10. Lasy P. G., Meleshko I. N. (2017) Approximate Solution of One Problem on Electrical Oscillations in Wires with the Use of Polylogarithms. *Energetika. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii i Energeticheskikh Obedinenii SNG = Energetika. Proceedings of CIS Higher Education Institutions and Power Engineering Associations,* 60 (4), 334–340 (in Russian). https://doi.org/10.21122/1029-7448-2017-60-4-334-340.
11. Pykhteev G. N., Meleshko I. N. (1976) *Polylogarithms, their Properties and Methods of their Computation*. Minsk, BSU Publ. 68 (in Russian).
12. Meleshko I. N. (1999) *Special Formulas for Cauchy-Type Integrals and their Applications*. Minsk, VUZ-YuNITI Publ. 197 (in Russian).

Received: 26 March 2019 Accepted: 4 June 2019 Published online: 30 September 2019