

За особые достижения в хозяйственном развитии республики Указом Президента Республики Беларусь от 13 сентября 2000 г. № 500 «Белтрансгазу» присуждено Почетное государственное Знамя Республики Беларусь, большая группа рабочих и специалистов предприятия награждены высокими государственными и правительственными наградами.

Поступила 22.10.2001

УДК 536.2.001.24

НОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Докт. физ.-мат. наук, проф. КАРТАШОВ Э. М.,
преп. РЕМИЗОВА О. И.

Московская государственная академия тонкой химической технологии

Аналитическая теория теплопроводности изотропных твердых тел рассматривает классические задачи нестационарного теплопереноса, уравнение энергии которого можно записать в виде [1]

$$c\rho \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{q}(M, t) + F(M, t), \quad M \in D, \quad t > 0. \quad (1)$$

Входящий в (1) вектор плотности теплового потока $\vec{q}(M, t)$ имеет вид классической зависимости Фурье

$$\vec{q}(M, t) = -\lambda \operatorname{grad} T(M, t), \quad (2)$$

которая описывает распространение теплоты диффузным способом. Соотношения (1)–(2) приводят к уравнению нестационарной теплопроводности параболического типа [1, 2]

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t) + (1/c\rho) F(M, t), \quad M \in D, \quad t > 0 \quad (3)$$

($a = \lambda / c\rho$ – температуропроводность) и соответствующим для (3) крайвым задачам с условиями:

$$T(M, t)|_{t=0} = \Phi_0(M), \quad M \in \bar{D}; \quad (4)$$

$$\beta_1 \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} + \beta_2 T(M, t) = \varphi(M, t), \quad M \in S, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

где D – конечная или частично ограниченная выпуклая область изменения $M(x, y, z)$; S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D ; \vec{n} – внешняя нормаль к S ; $\Omega = \{M(x, y, z) \in D, t > 0\}$ – цилиндрическая область в фазовом пространстве (x, y, z, t) с основанием D при $t = 0$; краевые функции в (3)–(5) принадлежат классу функций [2]:

$$F(M, t) \in C^0(\bar{\Omega}); \quad \Phi_0(M) \in C^1(\bar{\Omega});$$

$$\varphi(M, t) \in C^0(S \times t \geq 0); \quad \bar{\Omega} = (M \in \bar{D} = D + S, t \geq 0).$$

Искомое решение:

$$T(M, t) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), \quad \text{grad}_M T(M, t) \in C^0(\bar{\Omega}); \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0.$$

Аналитические решения краевых задач (3)–(5) относительно функции $T(M, t)$ показывают, что скорость распространения теплоты в изучаемых средах является бесконечной. Для большинства практических задач нестационарной теплопроводности классическая феноменология Фурье (2) дает удовлетворительные результаты. Более того, для уравнений параболического типа (3) краевые задачи (3)–(5) являются предметом практически необозримого числа исследований. С годами их поток не уменьшается, охватывая все новые содержательные математические объекты и все большее число самых разнообразных приложений [3], учитывая наличие хорошо разработанных аналитических методов, дающих точное решение задачи (3)–(5) [1–6].

В последние десятилетия в аналитической теории теплопроводности (и родственных процессов) развивается направление, учитывающее конечную скорость распространения теплоты при исследовании теплообмена с помощью модельных представлений на основе обобщенного закона теплопроводности [7]. Для анизотропных тел этот закон установил С. Камский [8], вводя в принцип Онзагера характеристику скорости изменения теплового потока – тепловую инерцию. Для изотропных тел закон, обобщающий (2), установил А. В. Лыков [1] как гипотезу о конечных скоростях распространения теплоты и массы для тепло- и влагопереноса в капиллярно-пористых телах. Согласно [1],

$$\vec{q}(M, t) = -\lambda \text{grad} T(M, t) - \tau_r \frac{\partial \vec{q}(M, t)}{\partial t}, \quad (6)$$

где τ_r – время релаксации теплового потока, связанное со скоростью распространения теплоты ϑ_T соотношением $\vartheta_T = \sqrt{a/\tau_r}$. Для металлов $\tau_r = 10^{-11}$ с; для азота $\tau_r = 10^{-9}$ с; для аморфных тел типа неорганического стекла и полимеров, имеющих сложную структуру, время релаксации достигает значений $(10^{-7} - 10^{-5})$ с. Опытное измерение τ_r во мно-

гих случаях не представляется возможным. Скорость распространения теплоты для стали $\vartheta_T = 1800$ м/с, для алюминия $\vartheta_T = 2930$ м/с, что превышает скорость распространения звука; для азота $\vartheta_T = 150$ м/с и для газов в условиях разряженного сверхзвукового потока влияние конечной скорости распространения теплоты на теплообмен становится заметным. Подобное влияние может проявляться также при очень низких температурах (например, в жидком гелии $\vartheta_T = 19$ м/с при $T = 1,4$ К [9]) и даже при обычных температурах в твердых телах, когда в нестационарном процессе рассматривается малый период времени [9].

Соотношения (1) и (6) приводят к уравнению теплопроводности гиперболического типа

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a\Delta T(M, t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial t^2} + \frac{\tau_r}{c\rho} \left(\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_r} F(M, t) \right), \quad M \in D, \quad t > 0. \quad (7)$$

Можно выделить большой класс моделей, основанных на уравнении (7). Так, гиперболическое уравнение используется для описания температурных полей, возникающих при высокоинтенсивном теплообмене в устройствах импульсной и лазерной техники; при лазерной обработке металлов; в процессах плазменного напыления; в энергетических каналах ядерных реакторов и псевдооживленном слое; в дисперсных системах и зернистых материалах; в слоистых полупроводниковых структурах; при описании процесса электронной теплопроводности в высокотемпературной плазме; при математическом моделировании фронтовых процессов терморазложения; в кристаллах катализатора и при выращивании гомоэпитаксиальных пленок германия, возникающих в ходе экзотермических химических реакций и др. [10]. Задачи теплопроводности на основе гиперболического уравнения (7) называются обобщенными. С математической точки зрения, обобщенные задачи нестационарного переноса значительно отличаются от классических (3)–(5), являясь более сложными при нахождении аналитических решений. Следует подчеркнуть, что достигнутые за последние два–три десятилетия успехи в нахождении точных аналитических решений краевых задач для (7) весьма незначительны. Это объясняется несовершенством математического аппарата, приспособленного для решения обобщенных задач, в частности отсутствием в известных справочниках по операционному исчислению ([11] и др.) формул обращения для изображений, возникающих при решении гиперболического уравнения. В то же время найденные решения содержат неточности как в самих функциональных конструкциях аналитических решений, так и в исходной постановке задачи. Для (7) чаще используются классические граничные условия (5), а не их интегральная форма записи, вытекающая из обобщенного закона (6). Ниже эти вопросы разбираются детальным образом. Формулируется также математический аппарат в виде интегральных соотношений, достаточно

эффективных при нахождении точных аналитических решений тепловых задач обобщенного типа.

Рассмотрим сначала область $\Omega_0 = (z > l, t > 0)$; этот случай наиболее часто встречается в приложениях и требует ряда уточнений. Уравнение (7) при отсутствии внутреннего источника теплоты (его наличие рассмотрим ниже) имеет вид

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad z > l, \quad t > 0. \quad (8)$$

Рассмотрим (8) при постоянных начальных условиях:

$$T(z, t)|_{t=0} = T_0, \quad z \geq l; \quad \frac{\partial T(z, t)}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad z \geq l. \quad (9)$$

Наличие постоянных или переменных (по координате) начальных условий в области Ω_0 имеет принципиальное значение для записи обобщенных граничных условий для гиперболического уравнения.

Граничное условие 1-го рода (температурный нагрев) записывается аналогично, как и для (3),

$$T(z, t)|_{z=l} = \varphi(t), \quad t > 0. \quad (10)$$

Граничное условие 2-го рода (тепловой нагрев) при постоянных начальных условиях (9) на основании (6) имеет обобщенный интегральный вид

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(z, \tau)}{\partial z} |_{z=l} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = -\frac{1}{\lambda} q(t), \quad t > 0. \quad (11)$$

Граничное условие 3-го рода (нагрев средой) при начальных условиях (9) имеет также вид обобщенной интегральной формы записи

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(z, \tau)}{\partial z} |_{z=l} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h[T(z, t)|_{z=l} - T_c(t)] \quad t > 0. \quad (12)$$

К этим условиям необходимо добавить еще одно граничное условие

$$|T(z, t)| < +\infty, \quad z \geq l, \quad t \geq 0. \quad (13)$$

При формальном переходе в (11)–(12) к дифференциальной форме записи граничных условий следует проявлять осторожность, так как в случае постоянных граничных функций $q(t) = q = \text{const}, t > 0$; $T_c(t) = T_c = \text{const}, t > 0$ дифференциальная форма записи не будет эквивалентна интегральной (11)–(12) (не удовлетворяет (11)–(12)) и получаемые далее аналитические решения тепловой задачи не являются истинными.

В действительности, дифференциальная форма обобщенных граничных условий 2-го и 3-го родов, эквивалентная интегральным условиям (11)–(12), имеет вид:

для условий (11)

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} /_{z=l} = -\frac{1}{\lambda} \left(1 + \tau_r \frac{d}{dt} \right) q(t), \quad t > 0, \quad (14)$$

если $q(t)$ – переменная величина и

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} /_{z=l} = -\frac{1}{\lambda} (1 + \tau_r \delta(t)) q, \quad t > 0, \quad (15)$$

если $q = \text{const}$, где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака; для условий (12)

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} /_{z=l} = h \left(1 + \tau_r \frac{d}{dt} \right) [T(z, t) /_{z=l} - T_c(t)], \quad t > 0, \quad (16)$$

если $T_c(t)$ – переменная величина и

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} /_{z=l} - h \left(1 + \tau_r \frac{d}{dt} \right) T(z, t) /_{z=l} = -h [1 + \tau_r \delta(t)] T_c, \quad t > 0, \quad (17)$$

если $T_c = \text{const}$.

Рассмотрим далее соотношения (8)–(13) в безразмерных переменных:

$$F_0 = \frac{at}{l^2}; \quad z' = \frac{z}{l}; \quad Bi = hl; \quad c_0 = \frac{a\tau_r}{l^2}; \quad \varphi^*(F_0) = \frac{\varphi(t) - T_0}{T_c - T_0};$$

$$q^*(F_0) = \frac{lc_0 q(t)}{\lambda(T_c - T_0)}; \quad T_c^*(F_0) = \frac{T_c(t) - T_0}{T_c - T_0};$$

$$W(z', F_0) = \frac{T(z, t) - T_0}{T_c - T_0}. \quad (18)$$

Имеем:

$$\frac{\partial W(z', F_0)}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2} - c_0 \frac{\partial^2 W}{\partial F_0^2}, \quad z' > 1, \quad F_0 > 0; \quad (19)$$

$$W(z', F_0) /_{F_0=0} = \frac{\partial W(z', F_0)}{\partial F_0} /_{F_0=0} = 0, \quad z' \geq 0. \quad (20)$$

Граничные условия:

$$W(z', F_0) /_{z'=1} = \varphi^*(F_0), \quad F_0 > 0, \quad (21)$$

либо

$$\int_0^{F_0} \frac{\partial W(z', \tau)}{\partial z'} /_{z'=1} \exp\left(-\frac{F_0 - \tau}{c_0}\right) d\tau = -q^*(F_0), \quad F_0 > 0, \quad (22)$$

либо:

$$\int_0^{F_0} \frac{\partial W(z', \tau)}{\partial z'} /_{z'=1} \exp\left(-\frac{F_0 - \tau}{c_0}\right) d\tau =$$

$$= Bic_0 [W(z', F_0) /_{z'=1} - T_c^*(F_0)], \quad F_0 > 0;$$

$$|W(z', F_0)| < +\infty, \quad z' \geq 1, \quad F_0 \geq 0. \quad (24)$$

В пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{W}(z', p) = \int_0^{\infty} \exp(-pF_0) W(z', F_0) dF_0 \quad (25)$$

решение уравнения (19) с учетом (24) сводится к выражениям вида $\bar{f}(p) \exp(-k\sqrt{p^2 + c_0 p})$, где вид зависимости $\bar{f}(p)$ определяется типом граничного условия (21)–(23). Приведем ряд формул операционного исчисления, полученных на основе [12]:

$$\begin{aligned} \exp[-k\sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}] \leftarrow \exp(-kp) \delta(F_0 - k) + \\ + \sigma k \exp(-\rho F_0) \frac{I_1(\sigma\sqrt{F_0^2 - k^2})}{\sqrt{F_0^2 - k^2}} l(F_0 - k), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\rho = \alpha + \beta, \quad \sigma = \alpha - \beta, \quad l(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0; \\ 0, & z < 0; \end{cases} \quad (27)$$

$l(z)$ – импульсная функция;

$I_1(z)$ – модифицированная функция Бесселя;

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \exp[-k\sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}] \leftarrow [\exp(-kp) + \\ + \sigma k \int_k^{F_0} \exp(-\rho\tau) \frac{I_1(\sigma\sqrt{\tau^2 - k^2})}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} d\tau] l(F_0 - k); \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{1}{\sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}} \exp \left[-k \sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)} \right] \leftarrow l(F_0 - k) \times$$

$$\times [\exp(-\rho F_0) I_0(\sigma \sqrt{F_0^2 - k^2})]; \quad (29)$$

$$\overline{f}(p) \exp \left[-k \sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)} \right] \leftarrow [f(F_0 - k) \exp(-\rho k) +$$

$$+ \sigma k \int_k^{F_0} f(F_0 - \tau) \exp(-\rho \tau) \frac{I_1(\sigma \sqrt{\tau^2 - k^2})}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} d\tau] l(F_0 - k); \quad (30)$$

свертка функций $f_1(F_0)$ и $f_2(F_0)l(F_0 - k)$ есть

$$\mathfrak{S}(F_0) = l(F_0 - k) \int_0^{F_0 - k} f_1(\tau) f_2(F_0 - \tau) d\tau; \quad (31)$$

свертка функций $f_1(F_0)$ и $f_2(F_0)\delta(F_0 - k)$ есть

$$\mathfrak{S}(F_0) = f_1(F_0 - k) f_2(k) l(F_0 - k). \quad (32)$$

Теперь можно записать аналитические решения всех трех краевых задач нестационарной теплопроводности, рассмотренных в (19)–(24). Для уменьшения громоздкости в (21)–(23) достаточно рассмотреть случаи

$$\varphi^*(F_0) = q^*(F_0) = T_c^*(F_0) = 1, \quad (33)$$

учитывая, что общий случай несложно записать на основе приведенных выше соотношений. Имеем

$$\overline{W}(z', p) = \overline{f}(p) \exp \left[-(z' - 1) \sqrt{c_0} \sqrt{p^2 + p/c_0} \right], \quad (34)$$

где

$$\overline{f}(p) = \begin{cases} \frac{1}{p} - \text{граничные условия (21), (33);} \\ \frac{\sqrt{1+pc_0}}{c_0 p^{3/2}} - \text{граничные условия (22), (33);} \\ \frac{Bi \sqrt{1+pc_0}}{p(Bi \sqrt{1+pc_0} + \sqrt{p})} - \text{граничные условия (23), (33).} \end{cases}$$

В пространстве оригиналов находим:

$$W(z, F_0) = \left[f(F_0 - z') \exp\left(-\frac{z'-1}{2\sqrt{c_0}}\right) + \frac{z'-1}{2\sqrt{c_0}} \int_{(z'-1)\sqrt{c_0}}^{F_0} f(F_0 - \tau) \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{\tau}{2c_0}\right) I_1\left(\frac{1}{2c_0} \sqrt{\tau^2 - c_0(z'-1)^2}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - c_0(z'-1)^2}} \right] l[F_0 - (z'-1)\sqrt{c_0}], \quad (35)$$

$$f(F_0) = \begin{cases} 1 - & 1 \text{ задача;} \\ \int_0^{F_0} \left[\frac{\exp(-\tau'/c_0)}{\sqrt{\pi\tau'}} + \frac{1}{\sqrt{c_0}} \Phi(\sqrt{\tau'/c_0}) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\pi c_0(F_0 - \tau')}} - & 2 \text{ задача;} \\ 1 - \gamma_3 \exp(-\gamma_2 F_0) - \gamma_1 \int_0^{F_0} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi\tau'}} + \sqrt{\gamma_3/c_0} \exp(\gamma_3 \tau'/c_0) \times \right. \\ \left. \times \Phi(\sqrt{\gamma_3 \tau'/c_0}) \right] \frac{\exp(-\tau'/c_0)}{\sqrt{\pi(F_0 - \tau')}} d\tau' - & 3 \text{ задача,} \end{cases}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1 - \gamma_3}{Bi\sqrt{c_0}}; \quad \gamma_2 = \frac{1 - \gamma_3}{c_0}; \quad \gamma_3 = (1 - Bi^2 c_0)^{-1}. \quad (36)$$

Если в (19) присутствует функция источника теплоты, т. е.

$$\frac{\partial W(z', F_0)}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2} - c_0 \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2} + \Theta(z', F_0), \quad z' > 1; \quad F_0 > 0 \quad (37)$$

и краевые условия имеют вид (20)–(24), (33), то к правой части операционного решения (34) необходимо прибавить слагаемое

$$\frac{1}{2\sqrt{\bar{b}(p)}} \int_1^{\infty} \bar{\Theta}(\xi, p) \left\{ \exp\left[-|z' - \xi| \sqrt{\bar{b}(p)}\right] - \right. \\ \left. - \exp\left[-(z' + \xi - 2)\sqrt{\bar{b}(p)}\right] \right\} d\xi, \quad (38)$$

где $\bar{b}(p) = c_0 p^2 + p$. Оригинал (38) находится по приведенным выше формулам обращения.

Приведенные рассуждения показывают, что нахождение аналитических решений задач теплопереноса для уравнений гиперболического типа даже для простейшей области $z' \geq 1$; $F_0 \geq 0$ технически значительно труднее классических случаев (3)–(5). Другой особенностью полученных операционных решений является возможность представления для частично ограниченной области аналитического решения одной и той же задачи в раз-

личных классах функций, что не имеет места для задач (3)–(5) на основе феноменологии Фурье (для (3)–(5) такая возможность имеет место только в ограниченных областях канонического типа, когда аналитическое решение задачи имеет вид ряда типа Фурье–Бесселя, либо формулы суммирования Пуассона [2]). Если в (34) переходить к оригиналам по формуле обращения с помощью контурного интеграла Римана–Меллина

$$W(z', F_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}(p) \exp(pF_0) \exp\left[-(z'-1)\sqrt{c_0} \sqrt{p + \frac{1}{c_0}}\right] dp \quad (39)$$

и вычислять интеграл (39) непосредственно при наличии двух точек ветвления $p = 0$ и $p = -(1/c_0)$, то в отличие от (35)–(36) аналитические решения будут иметь следующий вид:

задача 1 (температурный нагрев (21), (33))

$$W(z', F_0) = \left[1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{1/c_0} \exp(-\rho F_0) \frac{\sin(z'-1)\sqrt{\rho(1-c_0\rho)}}{\rho} d\rho \right] \times \quad (40)$$

$$\times I[F_0 - (z'-1)\sqrt{c_0}];$$

задача 2 (тепловой нагрев ((22), (33))

$$W(z', F_0) = \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{1/c_0} (1 - \exp(-\rho F_0)) \frac{\sqrt{1-c_0\rho}}{\rho^{3/2}} \cos(z'-1)\sqrt{\rho(1-c_0\rho)} d\rho \right] \times$$

$$\times I[F_0 - (z'-1)\sqrt{c_0}]; \quad (41)$$

задача 3 (нагрев средой (23), (33))

$$W(z', F_0) = \left\{ 1 - \frac{Bi}{\pi} \int_0^{1/c_0} \frac{\sqrt{1-c_0\rho}}{\rho} \exp(-\rho F_0) \left[\frac{Bi \sqrt{1-c_0\rho}}{Bi^2(1-c_0\rho) + \rho} \times \right. \right.$$

$$\left. \times \sin\left[(z'-1)\sqrt{\rho(1-c_0\rho)}\right] + \frac{\sqrt{\rho} \cos\left[(z'-1)\sqrt{\rho(1-c_0\rho)}\right]}{Bi^2(1-c_0\rho) + \rho} \right] d\rho \right\} \times \quad (42)$$

$$\times I[F_0 - (z'-1)\sqrt{c_0}].$$

Эти решения тождественны в смысле числа и, по-видимому, могут быть преобразованы друг в друга, что является достаточно сложной задачей вычислительной математики.

На рис. 1 приведены кривые изменения температуры $W(z', F_0)$ от F_0 в сечении $z' = 2$ при $c_0 = 0,001$, построенные по (40)–(42). Здесь, как и в классическом случае (3)–(5), существует пограничное значение F_0^* , ниже которого температурный нагрев (задача 1) является наиболее интенсивным,

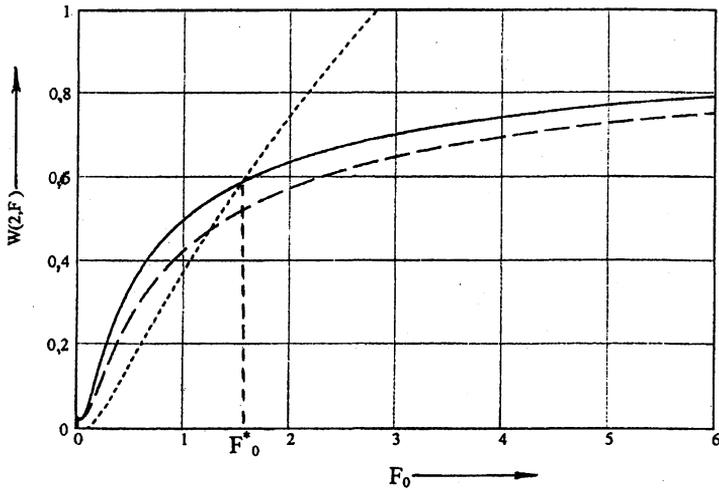


Рис. 1. Температурные кривые в сечении $z' = 2$ при $c_0 = 0,001$: ——— температурный нагрев (решение (40)); - - - - тепловой нагрев (решение (41)); - · - · - нагрев средой при $Bi = 5$ (решение (42))

причем с увеличением параметра c_0 величина F_0^* смещается в сторону меньших значений. Этот факт был установлен в термомеханике при исследовании динамической реакции массивного тела на тепловой удар [10] в рамках моделей (3)–(5). Было показано, что среди различных (традиционных) видов теплового нагружения температурный нагрев является наиболее опасным режимом. Рис. 2 описывает тепловую реакцию области в сечении $z' = 2$ при $c_0 = 0,001$ при температурном нагреве (задача 1), полученную по (35) и (40). Некоторое различие кривых связано с особенностью вычислительных схем при численной обработке соотношений (35) и (40).

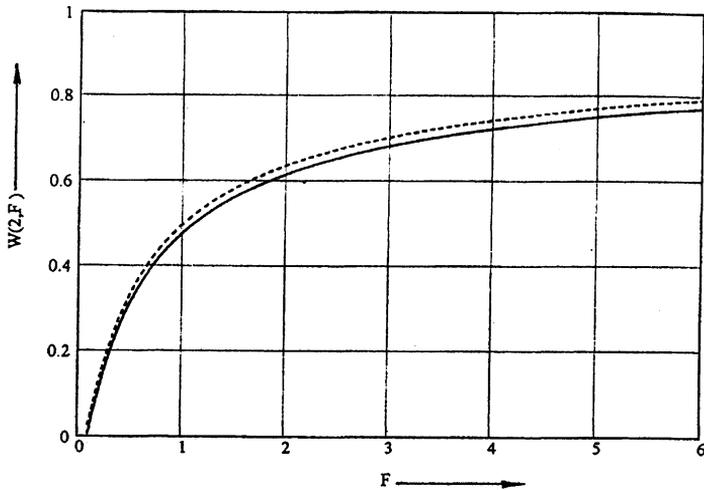


Рис. 2. Тепловая реакция области в сечении $z' = 2$ при температурном нагреве: - · - · - решение (40); ——— решение (35)

В ряде практических случаев можно уменьшить громоздкость в записи аналитических решений задач для уравнения (8) на основе анализа пара-

метра $M = \vartheta_p / \vartheta_t$, где ϑ_p – скорость звука в материале, $\vartheta_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$; λ, μ – изотермические коэффициенты Ламе; ρ – плотность. В качестве иллюстрации рассмотрим (8) в конечной области $0 \leq z \leq l$, $t \geq 0$ при начальных условиях (9), граничных условиях (10) и (12) соответственно на границах области $z = l$ и $z = 0$ при $\varphi(t) = 0$; $T_c(t) = T_0 = \text{const}$. Перейдем к следующим безразмерным переменным:

$$z' = \frac{\vartheta_p z}{a}; \quad t' = \frac{\vartheta_p^2 t}{a}; \quad M = \frac{\vartheta_p}{\vartheta_T}; \quad Bi^* = \frac{ah}{\vartheta_p}; \quad (43)$$

$$l_0 = \frac{\vartheta_p l}{a}; \quad W(z', t') = \frac{T(z, t) - T_0}{T_c - T_0}.$$

Граничное условие (12) в переменных (43) будет иметь вид

$$\frac{1}{M^2} \int_0^{t'} \frac{\partial W(z', \tau)}{\partial z'} \Big|_{z'=0} \exp\left(-\frac{t' - \tau}{M^2}\right) d\tau = Bi^* [W(z', t') \Big|_{z'=0} - 1], \quad t' > 0. \quad (44)$$

Рассмотрим случай, когда $\vartheta_p \ll \vartheta_t$, т. е. $M \ll 1$. Анализ условия (44) в пространстве изображений по Лапласу (25) при $M \ll 1$ показывает, что от (44) можно перейти к классическому условию теплообмена и, таким образом, исходная задача будет иметь вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t'} = \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2} - M^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t'^2}, \quad 0 < z' < l_0; \quad t' > 0; \quad (45)$$

$$W(z', t') \Big|_{t'=0} = \frac{\partial W(z', t')}{\partial t'^2} \Big|_{t'=0} = 0, \quad 0 \leq z' \leq l_0; \quad (46)$$

$$\frac{\partial W(z', t')}{\partial z'} \Big|_{z'=0} = Bi^* [W(z', t') \Big|_{z'=0} - 1], \quad t' > 0; \quad (47)$$

$$W(z', t') \Big|_{z'=l_0} = 0, \quad t' > 0. \quad (48)$$

Приведенные выше операционные соотношения приводят к решению задачи (45)–(48) в виде

$$W(z', t') = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{t'} \exp\left(-\frac{\tau}{2M^2}\right) [\varphi(\gamma_{1n}, \tau) - \varphi(\gamma_{2n}, \tau)] d\tau, \quad (49)$$

где

$$\varphi(\gamma_{in}, \tau) = f_n(\tau - M\gamma_{in}) + \frac{1}{2M^2} \int_0^\tau \frac{y}{\sqrt{\tau^2 - y^2}} I_1 \times \\ \times \left(\frac{1}{2M^2} \sqrt{\tau^2 - y^2} \right) f_n(y - \gamma_{in} M) dy;$$

$$f_n(\tau) = (-1)^n \frac{Bi^*}{M} \exp\left(-\frac{Bi^*}{M} \tau\right) L_n\left(\frac{2Bi^*}{M} \tau\right) l(\tau);$$

$L_n(z)$ – полиномы Лагерра; $\gamma_{1n} = z' + 2nl_0$; $\gamma_{2n} = 2(n+1)l_0 - z'$.

Сравнивая решение (49) с классическим для задачи (45)–(48) при $M = 0$ [2], можно еще раз убедиться, что краевые задачи нестационарного переноса для уравнений гиперболического типа требуют пристального внимания в аналитической теории теплопроводности твердых тел. Дальнейшее обобщение гиперболической модели нестационарного переноса – переход к областям с движущимися во времени границами. Подобные задачи возникают во многих направлениях науки и техники, описанных в [2] и [13,14].

ВЫВОД

Рассмотрены краевые задачи нестационарного теплопереноса для уравнений гиперболического типа. Предложены уточненные граничные условия при тепловом нагреве и нагреве средой для постоянных значений граничных функций. Приведены интегральные соотношения в виде формул обращения операционного исчисления для аналитических решений тепловых задач обобщенного вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
2. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. – 540 с.
3. Карташов Э. М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущейся границей // ИФЖ. – 2001. – Т. 74, № 2. – С. 171–195.
4. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения / А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин – М.: Факториал, 1998. – 367 с.
5. Карташов Э. М. Метод интегральных преобразований в аналитической теории теплопроводности твердых тел // Известия АН. Энергетика. – 1993. – № 2. – С. 99–127.
6. Карташов Э. М. Расчеты температурных полей в твердых телах на основе улучшенной сходимости рядов Фурье – Ханкеля // Известия АН. Энергетика. – 1993. – № 3. – С. 106–120.
7. Новиков И. А. Феноменологическая теория переноса в средах с памятью: Автореф. ... докт. физ.-мат. наук / ИТМО имени А. В. Лыкова. – Мн., 1993.
8. Kaliski S. Wave Equations in Thermoelasticity // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., 1965. XIII, 5. – P. 409–416.
9. Баумейстер К., Хамилл Д. Гиперболическое уравнение теплопроводности: Решение задачи о полубесконечном теле // Теплопередача. – 1969. – № 4. – С. 112–119.
10. Карташов Э. М., Партон В. З. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара // Итоги науки и техники. – Сер. Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНТИ, 1991. – Т. 22. – С. 55–127.

11. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 446 с.

12. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. – М.: ГИИЛ, 1948. – 291 с.

13. Стальной слиток / Ю. А. Самойлович, В. И. Тимошпольский, И. А. Трусова и др. – Мн.: Белорусская наука, 2000. – Т. 1. – 584 с.

14. Стальной слиток / Ю. А. Самойлович, В. И. Тимошпольский, И. А. Трусова и др. – Мн.: Белорусская наука, 2000. – Т. 2. – 640 с.

Представлена кафедрой
прикладной технологии

Поступила 15.10.2001

УДК 621.165

КОМПЛЕКСНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЭРОЗИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ РАБОТЫ ЦНД ТУРБИНЫ Т-250/300-240

**Докт. техн. наук БАЛАБАНОВИЧ В. К.,
инженеры СКОРОБОГАТЫЙ Н. Н., ПАНТЕЛЕЙ Н. В.**

*Белорусская государственная политехническая академия,
Минская ТЭЦ-3*

Снижение температуры свежего и вторично перегретого пара на турбоустановках СКД с расчетных 560/565 до 540/540 °С в начале 80-х гг. и директивный переход на пониженный температурный график сетевой воды в 90-е гг. существенно повлияли на эрозионный режим работы ступеней ЦНД теплофикационных турбин. Ситуация усугубилась, кроме того, недостатками заводских систем влагоудаления из проточной части низкого давления, что ощутимо снизило эрозионную безопасность работы облопачивания ступеней низкого давления турбин.

В значительных масштабах это коснулось турбины Т-250/300-240, в частности, эрозионный износ нового облопачивания ее последней 31-й (40-й) ступени за месяц работы одной из них на теплофикационных режимах составил тот же уровень, что за несколько предыдущих лет до введения приведенных выше изменений. Появилась реальная опасность поломок рабочих лопаток последней ступени от эрозионного повреждения. Все это потребовало проведения комплексного исследования эрозионно опасных режимов ступеней ЦНД турбины и разработки мер по их защите. В основу расчетных исследований режимов работы ступеней ее ЦНД положен метод детального расчета характеристик потока «снизу вверх» [1]. Удобство нового метода заключается в том, что для известных величин расходов пара в ЦНД и давлений отработанного пара надежно определяются все основные характеристики потока в проточной части турбины, по которым рассчитывалась тепловая схема турбоустановки.