

## ТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И БИФУРКАЦИИ ТЕЧЕНИЯ ОТ КРУГОВОГО ИСТОЧНИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Докт. физ.-мат. наук, проф. ШАБЛОВСКИЙ О. Н.

*Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого*

В теории теплообмена и гидродинамике важное значение имеет модель точечного источника жидкости. Целью данной работы является изучение эволюционных свойств течения, инициируемого источником массы, импульса и энергии конечных размеров. Сформулируем основные положения модели [1] кругового источника жидкости.

Двумерное плоское неустановившееся течение несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости описывается в полярных координатах  $r, \varphi$  полными уравнениями движения в радиальном и трансверсальном направлениях, уравнением энергии и уравнением неразрывности. Теплоперенос характеризуется законом Фурье. Источник жидкости расположен внутри круга радиусом  $r = r_j > 0$ ;  $j$  – плотность распределения источников массы. Окружность  $r = r_j$  представляет собой линию сильного гидродинамического разрыва; такой разрыв является эффективной моделью теплоэнергетического устройства, при протекании через которое параметры жидкости (скорость, давление, температура, плотность, вязкость и др.) скачком изменяют свои значения. Динамические условия совместности на неподвижном сильном разрыве представляют собой балансы массы, энергии и двух компонент вектора импульса. Для обезразмеривания уравнений применяем в качестве масштабов радиус круга, плотность  $\rho$  и теплоемкость  $c_p$  жидкости, находящейся внутри круга; остальные масштабы величин связаны между собой зависимостями, обеспечивающими инвариантность размерной и безразмерной формы записи уравнений и граничных условий.

Течение жидкости внутри круга стационарное и определяется формулами:

$$v_r = ar; v_\varphi \equiv 0, \quad J = 2a\rho, \quad a \equiv \text{const}; \quad \lambda, \mu, c_p - \text{const}; \quad (\text{Pr})_i = c_p \mu / \lambda;$$

$$T = T_0 + r^2 T_2; \quad T_2 = -a^2 / 4c_p < 0, \quad T_0 = \frac{a\mu}{\rho c_p} \left( 2 - \frac{1}{2(\text{Pr})_i} \right);$$

$$p = p_0 + 2a\mu - \frac{3}{2}\rho a^2 r^2 > 0; \quad q = a^2 \lambda r / 2c_p \geq 0; \quad r \in [0, r_j].$$

Температура  $T_0$  в центре круга положительная, поэтому данное решение допускает два варианта: 1) источник массы,  $a > 0$ ;  $(\text{Pr})_i > 1/4$ ; 2) сток массы,  $a < 0$ ;  $(\text{Pr})_i < 1/4$ . Изучаемая область течения располагается вне круга (применяем индекс  $e$ ) и обладает следующими свойствами:

$$\rho_e \equiv \rho_j; \quad c_{pe} \equiv c_{pj} \equiv \text{const}; \quad J_e \equiv 0, \quad b \equiv \text{const}; \quad v_r = -b/r; \quad v_\varphi = v(r, t);$$

$$p = p(r,t); T = T(r,t); q_\varphi \equiv 0;$$

$$\mu_e = \mu_0 + \mu_1 T; \lambda_e = \lambda_0 + \lambda_1 T; \mu_1 < 0, \lambda_1 < 0; , r \geq r_j > 0.$$

Это означает, что источники массы отсутствуют, радиальная составляющая скорости стационарна и монотонно стремится к нулю по мере удаления от сильного разрыва; трансверсальная (окружная) скорость, давление и температура зависят только от времени и радиальной координаты. Для коэффициентов вязкости и теплопроводности применяем неоднородные линейные зависимости от температуры: эти простые аналитические аппроксимации содержат основную физическую информацию о нелинейных свойствах жидкости. Рассматриваем наиболее распространенный на практике случай, когда  $d\mu_e/dT < 0; d\lambda_e/dT < 0$ . Для аналитического описания внутренних объемных источников энергии применяем многочлен второй степени  $q_v = l_0 + l_1 T + l_2 T^2$ . Это дает возможность рассматривать как монотонный, так и немонотонный варианты зависимости  $q_v(T)$ .

Начальные условия:

$$t = 0; p = p^0(r); v = v^0(r); T = T^0(r); r \in [r_j, \infty).$$

Условия на бесконечности:

$$r \rightarrow \infty; v_r \rightarrow 0; v_\varphi \rightarrow 0; T \rightarrow T_\infty; p \rightarrow p_\infty.$$

В данном классе течений динамические условия совместности при  $r = r_j$  принимают вид:

$$\rho a r_j^2 = -\rho_j b; ab < 0; \tau_j = a \rho v_j r_j; p_j + \frac{\rho}{2} a^2 r_j^2 = p_0 + \frac{b}{r_j^2} (2\mu_j - b \rho_j);$$

$$q_j = \frac{b}{r_j} \rho_j c_{pj} T_j + p_0 \left( a r_j + \frac{b}{r_j} \right) + 2a^2 \mu r_j + \frac{\rho a r_j}{2} \left( v_j^2 + \frac{b^2}{r_j^2} - ab - \frac{5}{2} a^2 r_j^2 \right) - (\tilde{q}_n)_j,$$

где  $(\tilde{q}_n)_j$  — добавочный удельный тепловой поток на внешней стороне разрыва;

$$\mu_j = \mu_e(T_j); \lambda_j = \lambda_e(T_j); T_j = T(r_j, t); v_j = v(r_j, t); \tau_j = \tau_{r\varphi}(r_j, t); q_j = q_r(r_j, t).$$

Режим функционирования источника массы конечных размеров характеризуют априорно задаваемые величины  $J \equiv \text{const}; \rho_j \equiv \text{const}$  и  $p_0, v_j, T_j, (\tilde{q}_n)_j$ , которые могут зависеть от времени. Скачок давления на разрыве равен

$$p_j - p_i = \frac{\rho_j b^2}{r_j^2} \left( \frac{\rho_j}{\rho} - 1 \right) + \frac{2b}{r_j^2} \left( \mu_j + \frac{\mu \rho_j}{\rho} \right)$$

Для источника ( $b < 0$ ) имеем:  $\rho_j < \rho$ ;  $T_j > T_i$  и наружное давление падает  $p_j < p_i$ . Для стока ( $b > 0$ ) имеем:  $\rho_j > \rho$ ;  $T_j < T_i$  и тогда  $p_j > p_i$ . В обоих случаях, учитывая направление радиальной скорости, заключаем, что после протекания через сильный разрыв происходит нагрев жидкости, а давление уменьшается.

Рассматриваемый нелинейный термогидродинамический процесс является многопараметрическим, поэтому представляет несомненный интерес его подробный качественный анализ. Это тем более оправдано, что практика численных расчетов разрывных течений доставляет, как известно, осциллирующие решения, которые нуждаются в однозначной физической интерпретации. Для поставленной краевой задачи в [1] приближенным методом Бубнова-Галеркина построена при  $v_j, T_j, q_j - \text{const}$  динамическая система для существенных степеней свободы: трансверсальной скорости  $A(t)$  и температуры  $\theta(t)$  на окружности  $r = r^1 \in (r_j, \infty)$ . Это дает возможность изучить бифуркационные ситуации и установить пороги возникновения автоколебаний. Такой приближенный способ упрощения динамических систем высокой размерности хорошо зарекомендовал себя (вплоть до качественного согласия с результатами экспериментов) при исследовании электроэнергетических систем [2] и систем гидродинамического типа [3], а также в задачах лазерной термохимии [4]. Изучаемая динамическая система имеет вид [1]:

$$\frac{dA}{dt} = P(A, \theta), \quad \frac{d\theta}{dt} = Q(A, \theta); \quad (1)$$

$$P(A, \theta) = D_0 + D_1 A + D_2 \theta - D_3 A \theta; \quad (2)$$

$$Q(A, \theta) = E_0 + E_1 A + E_2 \theta + E_3 A \theta + E_4 A^2 + E_5 A^2 \theta + E_6 \theta^2; \quad (3)$$

$$D_0 = m_1 \text{PrPe}, \quad m_1 = \mu_1^0 q^0; \quad D_1 = \frac{1}{22} [15b^0 \text{Pe} - 31\text{Pr} + 10m_1 \text{Pr}];$$

$$D_2 = d_2 \mu_1^0 \text{PrPe}, \quad d_2 = -7/11, \quad D_2 > 0; \quad D_3 = d_3 \mu_1^0 \text{Pr}, \quad d_3 = 6/(11 \cdot 13), \quad D_3 < 0;$$

$$E_0 = 15q^0 - \frac{15}{4} b^0 q^0 \text{Pe} + \text{PrEc}(1 + b^0)(10 - 3m_1) + \frac{5}{4} \lambda_1^0 q^{0^2} +$$

$$+ \frac{28}{5} \lambda_1^0 (1 - q^0 + \frac{2}{7} q^{0^2}) + 21s_0 + 21s_1 \left( 1 - \frac{q^0}{2} \right);$$

$$E_1 = e_1 \frac{\text{EcPr}}{\text{Pe}} \left( 1 + \frac{107}{13} m_1 \right), \quad e_1 = -7/11;$$

$$E_2 = \frac{1}{22} (9b^0 \text{Pe} - 25) + \frac{56}{11 \cdot 13} \mu_1^0 \text{EcPr}(1 + b^0) + \frac{\lambda_1^0 q^0}{44} + s_1 + s_2(2 - q^0);$$

$$E_3 = -e_3 \mu_1^0 \text{EcPr}/\text{Pe}, \quad e_3 = d_3/4; \quad E_4 = \frac{e_4 \text{EcPr}}{(\text{Pe})^2} \left( 2 - \frac{5m_1}{8} \right), \quad e_4 = 2e_3;$$

$$E_5 = \frac{-e_5 E_3}{e_3 \text{Pe}}, \quad e_5 = \frac{9 \cdot 15}{11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 34}; \quad E_6 = e_6 \left( \frac{15s_2}{2} - 2\lambda_1^0 \right), \quad e_6 = e_4/3.$$

Запись этих коэффициентов содержит следующие безразмерные критерии: число Прандтля  $\text{Pr} = c_{pj} \mu_j / \lambda_j$ ; число Пекле  $\text{Pe} = c_{pj} \rho_j \nu_j r_j / \lambda_j$ ; число Эккерта  $\text{Ec} = \nu_j^2 / (c_{pj} T_j)$ . Очевидно, что число Рейнольдса равно  $\text{Re} = \text{Pe}/\text{Pr}$ . Критерий  $b^0 = b/(r_j \nu_j)$  несет важную информацию: его знак характеризует вид течения (источник или сток), а его модуль дает отношение модулей радиальной и трансверсальной скоростей, т. е. говорит о двумерности течения. Далее всюду полагаем  $\nu_j \geq 0$ . Критерии  $\mu_1^0 = \mu_1 T_j / \mu_j$ ;  $\lambda_1^0 = \lambda_1 T_j / \lambda_j$  являются параметрами нелинейности вязкой теплопроводной жидкости. Граничный тепловой поток и внутренний объемный источник энергии описываются безразмерными критериями:

$$q^0 = \frac{q_j r_j}{\lambda_j T_j}; \quad s_0 = \frac{l_0 r_j^2}{\lambda_j T_j}; \quad s_1 = \frac{l_1 r_j^2}{\lambda_j}; \quad s_2 = \frac{l_2 r_j^2 T_j}{\lambda_j}.$$

Температура жидкости на бесконечном удалении ( $r \rightarrow \infty$ ) от кругового источника массы равна  $T_\infty / T_j = 1 - q^0$ . Если параметры процесса  $\text{Pr}$ ,  $\text{Ec}$ ,  $\text{Pe}$ ,  $q^0$ ,  $\mu_1^0$ ,  $\lambda_1^0$ ,  $b^0$ ,  $s_0$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  заданы, то коэффициенты  $D_0, \dots, D_3$ ,  $E_0, \dots, E_6$  однозначно определены. Более наглядным образом можно работать с системой (1)–(3), оперируя коэффициентами  $D_0, D_1, E_0, \dots, E_6$  как известными величинами, а затем вычисляя  $D_2, D_3$  и основные параметры процесса. Последовательность расчетов выглядит так: зная  $E_3$  и  $E_5$ , определяем  $\text{Pe} = -E_3 e_5 / (E_5 e_3)$ ,  $\mu_1^0 \text{EcPr} = E_3 \text{Pe} / (-e_3)$ . Далее находим:

$$m_1 \equiv \mu_1^0 q^0 = \left( \frac{2E_1}{E_4} - \frac{e_1 \text{Pe}}{e_4} \right) \left( \frac{5E_1}{8E_4} - \frac{749\text{Pe}}{3} \right)^{-1}; \quad \text{EcPr} = E_1 \text{Pe} \left[ e_1 \left( 1 + \frac{107m_1}{13} \right) \right]^{-1} > 0.$$

Это позволяет подсчитать  $\mu_1^0$  и  $q^0$ . Из формулы для  $D_0$  находим  $\text{Pr}$  и затем вычисляем  $D_2, D_3$ . Параметр источника массы  $b^0$  определяем из формулы для  $D_1$ , а  $s_0, s_1, s_2$  — из формул для  $E_0, E_2, E_6$  соответственно. Данная схема вычислений обусловлена тем, что  $D_2/D_3 \sim E_3/E_5 \sim \text{Pe}$ . Сформулируем в сжатом виде основные результаты, полученные методами теории нелинейных колебаний.

**Прилипание жидкости на внешней стороне разрыва ( $\nu_j = 0$ ).** Изоклина  $P(A, \theta) = 0$  распадается на две прямые линии  $A_0 = 0$  и  $\theta_3 = D_1/D_3$ . С

помощью уравнения другой изоклины  $Q(A, \theta) = 0$  получаем две точки покоя  $(0, \theta_1), (0, \theta_2)$ . Третья точка покоя  $(A_*, \theta_3)$ , если она существует, характеризуется соотношением

$$A_*^2 = -E_6[\theta_1\theta_2 - \theta_3(\theta_1 + \theta_2) + \theta_3^2](E_4 + E_5\theta_3)^{-1} > 0.$$

Следует отметить, что  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  не зависят от числа Прандтля. Допустим, что  $E_6 > 0$ , и рассмотрим случай  $E_4 > 0$ , когда изоклина  $Q = 0$  имеет асимптоту  $\theta = -E_4/E_5 > 0$ . По обе ее стороны расположены две ветви линии  $\sigma = \sigma(\theta_3)$ . В этом варианте граница устойчивости узлов и фокусов  $\sigma = 0$  существует, а граница седел  $\Delta = 0$  физического смысла не имеет. Пусть  $\Delta > 0$  и  $0 < \theta_3 < \theta_1 < \theta_2$  либо  $\theta_3 > \theta_2 > \theta_1 > 0$ ; тогда  $(0, \theta_1)$  – устойчивый узел,  $(0, \theta_2)$  – седло. Для точки  $(A_*, \theta_3)$  имеем либо узел (устойчивый или неустойчивый), либо фокус (устойчивый или неустойчивый). При  $\theta_1 = \theta_2 = 2E_0/(-E_2) > 0$  две точки покоя сливаются и независимо от величины  $\text{Pr}$  появляется бифуркационная ситуация, характеризующаяся особой точкой типа седло–узел. Если  $q_v \equiv 0$ , то бифуркация имеется при  $q^0 > 0$ ;  $12 + \lambda_1^0 q^0 > 0$ . В качестве примеров течений с объемными источниками энергии возьмем выпуклую ( $s_2 < 0$ ;  $s_1 > 0$ ;  $s_0 < 0$ ) и вогнутую ( $s_2 > 0$ ;  $s_1 < 0$ ;  $s_0 > 0$ ) нелинейности. Бифуркация здесь существует, если  $q^0 > 2$ , а модули чисел  $s_0, s_1$  достаточно большие, так что знаки  $E_0, E_2$  совпадают со знаками  $s_0, s_1$  соответственно.

Если  $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ , то при  $\sigma = 0, \Delta > 0$  точка  $(A_*, \theta_3)$  – «центр»; имеем режим незатухающих колебаний с периодом  $\tau = 2\pi/\sqrt{\Delta}$ , где

$$\Delta = -2D_3E_6[\theta_3^2 + (\theta_3E_2 + E_0)E_6^{-1}] > 0. \quad (4)$$

Следовательно, период колебаний обратно пропорционален  $(\text{Pr})^{1/2}$ . Из условия  $\sigma = 0$  определяется значение параметра нелинейности  $\lambda_1^0$ , при котором возникают незатухающие колебания. Модуль параметра  $s_2$  и его знак (т. е. направление выпуклости  $q_v(T)$ ) – произвольные в рамках связи  $E_6 > 0$ .

Допустим, что  $E_6 < 0$ , и рассмотрим случай  $E_4 < 0$ , когда  $\mu_1^0 q^0 > 16/5$ . Это означает, что в отличие от прежних вариантов  $q^0 < 0$ . Кроме того, здесь  $0 < \theta_1 < \theta_3 < \theta_2$ . Линия  $\sigma = 0$  существует, если  $\theta_1\theta_2 < \theta_3^2$ ;  $2\theta_3 < \theta_1 + \theta_2$ . Тогда  $\Delta > 0$ , и точка  $(A_*, \theta_3)$  – «центр»; период незатухающих колебаний  $\tau = 2\pi/\sqrt{\Delta}$  определяется с помощью (4). Этот колебательный процесс реализуется только благодаря выпуклой немонотонности источника энергии  $q_v(T)$ .

**Теплоизоляция внешней стороны сильного разрыва ( $q_j = 0$ ).** Имеем  $D_0 = 0$  и предположим, что  $D_1 = 0$ , т. е. рассмотрим физический инте-

ресный сток массы при числе Рейнольдса  $Re = 31/(15b^0)$ , соответствующем порогу устойчивости линейной динамической задачи ( $\mu_1 = 0$ ). Берем основной вариант  $E_6 > 0$ . Изоклина  $P = 0$  распадается на две прямые линии  $\theta_0 = 0$  и  $A_3 = D_2/D_3 < 0$ . С помощью уравнения другой изоклины  $Q = 0$  получаем две точки покоя:  $(A_1, 0)$ ,  $(A_2, 0)$ . Проводя вычисления, находим  $\sigma = -(E_2 + E_3A + E_5A^2)$ ;  $\Delta = E_4(D_3A - D_2)(2A - A_1 - A_2)$ , причем  $\Delta > 0$  при  $A = A_1$ ;  $\Delta < 0$  при  $A = A_2$ . Отметим, что  $A_1, A_2, A_3$  не зависят от параметра нелинейности  $\mu_1^0$ . Для всех рассмотренных в этом классе движений вариантов в точке  $(A_2, 0)$  – седло. Ситуация, когда  $A_1 = A_2$  физического смысла не имеет. Если  $\sigma(A_1) > 0$ , то в точке  $(A_1, 0)$  – устойчивый узел либо устойчивый фокус; если  $\sigma(A_1) < 0$ , то  $(A_1, 0)$  – неустойчивый узел либо неустойчивый фокус. При  $\sigma(A_1) = 0$  имеем «центр»  $(A_1, 0)$ : период незатухающих колебаний равен  $\tau = 2\pi/\sqrt{\Delta}$ ;  $\Delta = E_4(D_2 - D_3A_1)(A_2 - A_1)$ , следовательно,  $\Delta \sim \mu_1^0$ . Укажем последовательность подсчета параметров, при которых происходит незатухающий колебательный процесс: из уравнения  $\sigma(A_1) = 0$  определяем  $E_6Pr$ ; число Пекле – из формулы  $A_1 + A_2 = -E_1/E_4$ ; параметр нелинейности  $\lambda_1^0$  – из формулы  $A_1A_2 = E_0/E_4$ .

Отметим важное отличие от варианта  $v_j = 0$ : здесь незатухающие колебания могут возникнуть и в отсутствие источников энергии ( $q_0 \equiv 0$ ) на фоне динамических процессов, инициируемых сильным разрывом при ненулевой скорости скольжения  $v_j > 0$ , только из-за нелинейных теплофизических свойств жидкости. Тепловые и гидродинамические аспекты влияния скорости скольжения на формирование структуры вихревого поля в потоке вязкой жидкости подробно изучены в [5, 6].

Если «центр» существует при  $q_0 \neq 0$ , то период колебаний  $\tau$ , в рамках ограничения  $E_6 > 0$ , не зависит от направления выпуклости источника энергии. Величина и знак  $\sigma(A_1)$  диктуются выбором  $E_2$ . Значение  $E_2 = -E_3A_1 - E_5A_1^2$  пороговое: оно разделяет устойчивые и неустойчивые решения. Существование еще двух состояний равновесия  $(A_3, \theta_1), (A_3, \theta_2)$ ,  $A_3 = d_2Re/d_3, 0 < \theta_1 < \theta_2$  связано с ограничением  $E_2 < 0$ , которое ассоциируется, в частности, с процессом, в котором комплекс  $\mu_1^0 E_6 Pr$  достаточно велик по модулю. Вычисления показали, что  $(A_3, \theta_1)$  – седло,  $(A_3, \theta_2)$  – неустойчивый узел. Если  $\theta_1 = \theta_2 = (E_4A_0^2/E_6)^{1/2}$ , то появляется сложная особая точка седло–узел.

В заключение отметим, что если снять ограничение  $q_j = 0$  и принять вариант  $D_1D_2 + D_0D_3 = 0$ , то снова получим либо два, либо четыре состояния равновесия. Фазовые портреты динамической системы в основном аналогичны предыдущим, но незатухающих колебаний в этом режиме течения нет.

**Выпуклая немонотонность источника энергии  $q_v(T)$ .** Вариант  $E_6 = 0$  представляет собой важный частный случай выпуклой немонотонности источника энергии, когда  $d^2q_v/dT^2 < 0$ . Уравнения нуль-изоклин имеют вид:

$$\theta_D = (D_0 + D_1A)/(D_3A - D_2); \quad A \in (A^1, \infty), \quad A^1 = D_2/D_3 < 0; \quad (5)$$

$$\theta_E = -(E_0 + E_1A + E_4A^2)/(E_2 + E_3A + E_5A^2). \quad (6)$$

Рассмотрим наиболее интересный в физическом отношении случай, когда изоклина (6) имеет два экстремума (минимум  $\theta_E^{\min}$  и максимум  $\theta_E^{\max}$ ), расположенных по обе стороны горизонтальной асимптоты ( $A \rightarrow \infty$ ):  $\theta_E^\infty = -E_4/E_5 > 0$ ,  $E_4 > 0, E_0 > 0$ . После построения линии  $\theta = \theta_E(A)$  и подсчета  $D_2, D_3$  получаем возможность, располагаясь значениями  $D_0, D_1$ , задать расположение изоклины  $\theta = \theta_D(A)$  на плоскости  $(A, \theta)$  и получить одну, две или три точки покоя. Примем  $\theta_D(0) = -D_0/D_2 > 0$ , т. е.  $D_0 < 0, q^0 > 0$ . Горизонтальная асимптота  $\theta_D^\infty = D_1/D_3$  характеризуется выбором  $D_1$ . Далее рассматриваем ветвь линии (5), расположенную справа от вертикальной асимптоты  $A = A^1$ . После того как все коэффициенты в (5), (6), кроме  $D_1$ , выбраны, именно  $D_1$  характеризует взаимное расположение асимптот  $\theta_D^\infty, \theta_E^\infty$  и показывает, каким будет в задаче параметр  $b^0$  (сток или источник массы и его интенсивность). На рис. 1 показаны примеры, когда минимум функции  $\theta_E(A)$  расположен левее ее максимума. Если  $0 < \theta_E^\infty < \theta_D^\infty < \theta_E^{\max}$ , то изоклины пересекаются в трех точках (рис. 1а); если  $0 < \theta_D(0) < \theta_D^\infty < \theta_E^\infty$ , то получаем два состояния равновесия (рис. 1б, линия 1). В этих случаях автоколебания динамической системы отсутствуют;  $\theta_D(0) > \theta_E(0)$ . Для ситуации, показанной на рис. 1а, реализуется триггерный режим, в котором крайние состояния равновесия устойчивы, а среднее неустойчиво. Рисункам 1а, б соответствует пример:  $E_1 = 1; E_2 = -10; E_4 = 1; E_5 = -1; E_6 = 0; E_0 = 0,3; E_3 = 1; D_2 = 20,95; D_3 = -9,87; A^1 = -2,12$ . При этом, в частности,  $Pr = 7,85; Ec = 0,14$ . Возьмем  $D_0 = -1$ , и тогда при  $D_1 = -10$  получим ситуацию, изображенную на рис. 1а. При  $D_1 = -9$  получим линию 1 на рис. 1б. Если  $D_1 = 0$ , то  $\theta_D^\infty = 0$  — имеем одну точку покоя (линия 2 на рис. 1б). Бифуркационную диаграмму представим в форме  $E_2 = (k_0 + k_1A + k_2A^2 - k_3A^3)/(D_0 + D_1A)$ , где  $k_3 = D_1E_5 + D_3E_4$ ; подробная запись остальных коэффициентов не приводится. Для вариантов, которые характеризуются рис. 1а, эта бифуркационная кривая имеет две ветви: монотонную (слева от асимптоты  $A = -D_0/D_1$ ) и немонотонную, имеющую минимум  $E_2^0 = E_2(A^0)$ , соответствующий бифуркационному значению параметра  $s_1$ . Выбор  $D_1$  влияет на модуль и знак коэффициента  $k_3$ , который определяет монотонность

(бифуркация отсутствует) либо немонотонность (бифуркация существует) правой ветви бифуркационной кривой. При  $D_1 = 0$  эта линия имеет одну монотонную ветвь. Если бифуркация существует, то она представляется сложной особой точкой седло–устойчивый узел. Расчеты показали, что бифуркация существует для стока массы, если  $b^0 > 0$  преодолевает пороговое значение, соответствующее условию  $\theta_D^\infty = \theta_E^\infty$ .

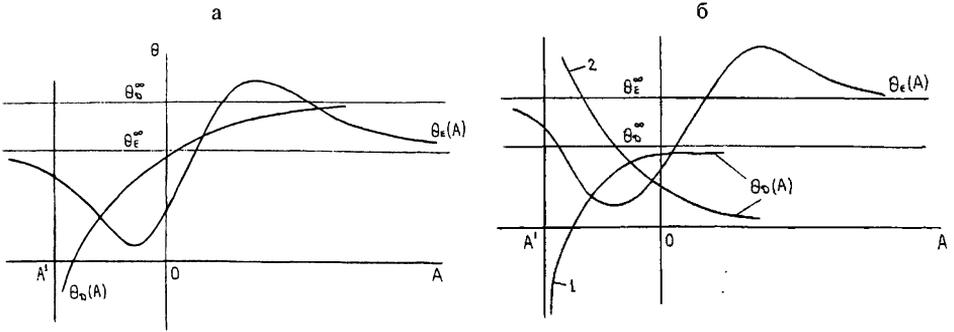


Рис. 1. Типичные расположения нуль–изоклин (5), (6) при  $E_1 > 0$  и отсутствии автоколебания: а – триггерный режим; б – одно (линия 2) и два (линия 1) состояния равновесия системы

Аналогичные выводы о характере бифуркации и условиях ее возникновения справедливы для другого класса течений, в котором на графике  $\theta = \theta_E(A)$  минимум расположен правее максимума и  $0 < \theta_D(0) < \theta_E(0)$  (рис. 2). Если  $0 < \theta_D^\infty < \theta_E^\infty$ , то немонотонная ветвь бифуркационной кривой имеет максимум, и существует бифуркация седло–устойчивый узел. Например:  $E_0 = 2$ ;  $E_1 = -2$ ;  $E_2 = -200$ ;  $E_3 = 1$ ;  $E_4 = 1$ ;  $E_5 = -1$ ;  $E_6 = 0$ ;  $D_0 = -0,1$ ;  $D_2 = 53,14$ ;  $D_3 = -25,05$ . При этом, в частности,  $Pr = 21$ ;  $Es = 0,14$ . Для случая  $D_1 = -10$  изоклины показаны на рис. 2а; для  $D_1 = 0$  – на рис. 2б. Своеобразие ситуации, изображенной на рис. 2б, заключается в том, что здесь выполнено необходимое условие возникновения автоколебаний: немонотонная нуль–изоклина  $\theta_E(A)$  пересекается с нуль–изоклиной  $\theta_D(A)$  на участке с падающей характеристикой («отрицательное сопротивление»).

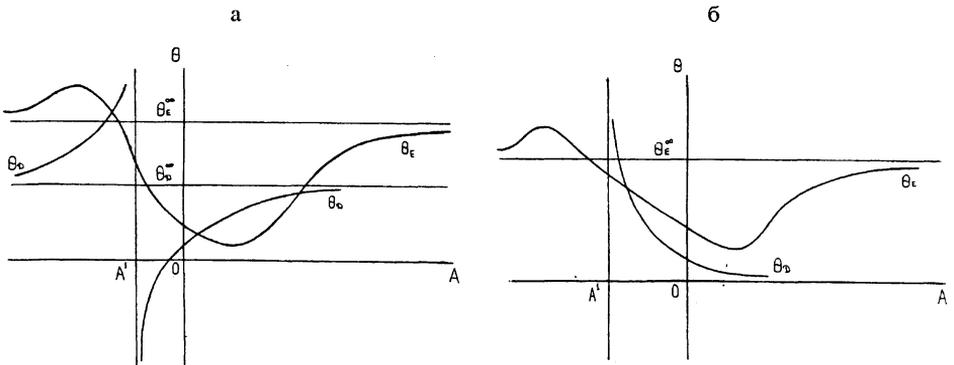


Рис. 2. Типичные расположения нуль–изоклин (5), (6) при  $E_1 < 0$ : а – одно и два состояния равновесия системы; б – «отрицательное сопротивление» на участке с падающей характеристикой

Изменение порядка расположения максимума  $\theta_E^{\max}$  и минимума  $\theta_E^{\min}$  (рис. 1 и 2) связано с переменной знака  $E_1$ : в этом смысле  $m_1 = -13/107$  является верхним порогом значений комплекса  $\mu_1^0 q^0$ , при которых необходимое условие возникновения автоколебаний выполнено. Для рассмотренных здесь бифуркационных состояний  $q_0(T) < 0$ .

**Разрывные колебания температуры.** Допустим, что  $E_0 = BE_2$ ;  $E_1 = BE_3$ ;  $E_4 = BE_5$ ,  $B \equiv \text{const}$ ;  $E_k = \tilde{E}_k / \text{Ec}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 6$ . Будем считать  $\varepsilon = (\text{Ec})^{-1}$  малым параметром задачи:  $\text{Ec} \gg 1$ , т. е. на внешней стороне разрыва кинетическая энергия жидкости значительно превосходит ее внутреннюю энергию. В данном случае комплекс  $\mu_1^0 q^0$  оказывается фиксированным:  $m_1 \cong -0,06272$ , причем  $\mu_1^0 = -e_1 [1 + (107m_1/13)] / (\text{Be}_3)$ ; кроме того, имеем:  $B < 0$ ;  $\theta \in (-B, \infty)$ ;  $E_6 > 0$ . Для этого течения параметр  $\varepsilon$  является существенным в области  $\theta > (-2B)$ : для начальных условий вне линии  $Q(A, \theta) = 0$  в системе устанавливаются устойчивые разрывные колебания: имеем на плоскости  $(A, \theta)$  предельный цикл. Пример:  $B = -1$ ;  $\tilde{E}_2 = 1$ ;  $\tilde{E}_3 = 1$ ;  $\tilde{E}_5 = -1$ ;  $\tilde{E}_6 = 1$ ;  $D_0 = -0,02$ ;  $D_2 = 1,18$ ;  $D_3 = -0,556$ . В этом случае  $\text{Pr} = 0,4546$ ;  $\text{Pe} = 0,14$ . Асимптота  $\theta_D^\infty = D_1 / D_3$  детерминирована выбором  $D_1 < 0$ , т. е. параметром  $b^0$ . Разрывные (релаксационные) колебания температуры происходят при выполнении условий: 1) число Эккерта должно быть велико,  $\text{Ec} \gg 1$ ; 2)  $D_1 / D_3 > (-2B)$ , т. е. источник массы ( $b^0 < 0$ ) имеет достаточно большую интенсивность; 3) тепловые граничные условия таковы, что  $q^0 \in (0, 1)$ , т. е.  $T_j > T_\infty > 0$ ; 4) в потоке действует объемный источник энергии с выпуклой немонотонностью и такой, что либо  $q_0(T) < 0$ , либо это знакопеременная функция.

**Автоколебания в термогидродинамической системе.** Рассмотрим ситуацию, когда некоторые коэффициенты в (2), (3) содержат малый параметр  $\zeta > 0$ :  $D_0 = \zeta \tilde{D}_0$ ;  $D_1 = \zeta \tilde{D}_1$ ;  $E_6 = D_3 + \zeta \tilde{E}_6$ ;  $E_k = \zeta \tilde{E}_k$ ;  $k = 1, \dots, 5$ , где модули величин, отмеченных тильдой, имеют порядок 1. Для остальных коэффициентов примем, что  $D_2 \sim 1$ ;  $|D_3| \sim 1$ ;  $|E_0| \sim 1$ . Систему (1)–(3) преобразуем, исключив  $\theta$ , к одному дифференциальному уравнению 2-го порядка. Поставим задачу Коши:  $t = 0$ ;  $A = A_0(\zeta)$ ;  $dA/dt = 0$  и построим автоколебательный режим, пользуясь методом Пуанкаре (например, [7]). Решение задачи об автоколебаниях в нулевом приближении представляется формулами:

$$A = (D_2 / D_3) + a \cos[tl / (1 + \zeta g_1)];$$

$$a^2 = (-4 / E_5) [2D_1 + E_2 + (E_3 D_2 / D_3) + (E_5 D_2^2 / D_3^2)] > 0; \quad (7)$$

$$\zeta g_1 = \frac{1}{2D_3 E_0} \left[ D_2 E_1 + \frac{2D_2}{D_3} (D_2 E_4 - D_3 E_1) - 3D_3 E_4 \left( \frac{a^2}{4} + \frac{D_2}{D_3} \right) - E_0 E_6 \right].$$

Период автоколебательного режима  $\Omega(a, \zeta) = 2\pi/\omega(a, \zeta)$  зависит не только от малого параметра  $\zeta$ , но и от амплитуды  $a$  автоколебаний:  $\omega(a, \zeta) = l[1 + \zeta g_1(a) + \zeta^2(a) + \dots]^{-1}$ , где  $l$  – частота колебаний «порождающего» решения,  $l^2 = D_3 E_0 > 0$ ;  $g_1$  – так называемая «поправка на частоту». Построение последующих приближений производится стандартным образом.

Проанализировав построенное решение, можно утверждать, что автоколебательный режим существует необходимым образом на фоне нелинейных температурных свойств динамической вязкости жидкости ( $\mu_1^0 < 0$ ) для стока массы достаточно большой интенсивности ( $b^0 > 0$ ), а именно: комплекс  $2D_1 + E_2$ , согласно (7), должен превосходить пороговое значение:

$$d_*^2(-\mu_1^0 \text{EcPr}) > 0; \quad d_*^2 = \frac{-e_3 d_2}{d_3} \left( 1 - \frac{d_2 e_5}{d_3 e_3} \right) > 0.$$

Частота  $\omega(a, \zeta)$  зависит от параметров процесса сложным нелинейным образом.

В заключение отметим, что возможен еще один поддающийся аналитическому описанию вариант, когда  $E_1 \sim 1$ ;  $E_4 \sim 1$ , а остальные коэффициенты такие же, как в представленном примере. Изучение этого автоколебательного процесса также выполняется методом Пуанкаре.

## ВЫВОДЫ

1. Установлено принципиальное влияние нелинейных свойств объемного источника энергии  $q_v(T)$  на термогидродинамическую устойчивость течения и возникновение бифуркационных ситуаций.

2. Выполнен анализ реагирования потока жидкости на управляющие воздействия, обусловленные: а) трансверсальной скоростью  $v_j$ , характеризующей скольжение жидкости на сильном разрыве; б) тепловым потоком  $q_j$ , играющим доминирующую роль в проявлении эволюционных свойств температурно-неоднородного поля.

3. Установлены закономерности появления бифуркационных нелинейностей при разнообразных условиях функционирования кругового источника. Обнаружены автоколебательный и триггерный режимы течения. Большое значение в появлении «порогов» явлений имеет не только знак, но и интенсивность источника (стока).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ш а б л о в с к и й О. Н. Нелинейные тепловые явления в плоском нестационарном течении от кругового источника вязкой жидкости // Тепломассообмен ММФ-2000. IV Минский международный форум. – Т. 1. Конвективный тепломассообмен. – Мн., 2000. – С. 242–245.

2. К а р т в е л и ш в и л и Н. А., Г а л а к т и о н о в Ю. И. Идеализация сложных динамических систем: С примерами из электроэнергетики. – М.: Наука, 1976. – 272 с.

3. Г л е д з е р Е. Б., Д о л ж а н с к и й Ф. В., О б у х о в А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. – М.: Наука, 1981. – 366 с.

4. Карлов Н. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С. Лазерная термодинамика. — М.: Наука, 1992. — 296 с.

5. Шабловский О. Н. Конвективный теплообмен и вихревая динамика в условиях пристеночного скольжения вязкой жидкости // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). — 1997. — № 5–6. — С. 90–95.

6. Шабловский О. Н. О знакопеременной диссипации энергии в жидкости с релаксирующими вязкими напряжениями // ИФЖ. — 1997. — Т. 70, № 6. — С. 967–974.

7. Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. — М.: Наука, 1997. — 496 с.

Представлена кафедрой  
технической механики

Поступила 20.01.2001

УДК 621.694.3

## ИССЛЕДОВАНИЕ САМОРЕГУЛИРУЮЩИХСЯ СТРУЙНЫХ НАСОСОВ

Асп. ХОХЛОВ В. А.

*Ташкентский государственный технический университет*

Асп. КОРЕВИЦКИЙ Г. А.

*Белорусская государственная политехническая академия*

Струйные насосы в последние годы находят широкое применение во многих областях техники. Этому способствуют их высокие конструктивные и эксплуатационные показатели. Струйные насосы просты по конструкции, доступны для изготовления и ремонта, надежны в работе, не требуют предварительного залива перед пуском, позволяют откачивать загрязненную воду и водо-воздушную смесь.

Предложено применять струйные насосы для откачки дренажных и фильтрационных вод из зданий гидроэлектростанций и насосных станций [1, 2]. Они надежнее центробежных насосов, традиционно используемых для этих целей, так как работают от давления воды напорного трубопровода и позволяют откачивать дренажные и фильтрационные воды даже при длительном обесточивании всей станции.

Следует отметить, что струйные насосы работают эффективно только при строго определенных условиях, на которые они рассчитываются. Известно, что при сработке водохранилища на гидроэлектростанции будет уменьшаться геометрическая высота столба жидкости, и, следовательно, снижаться давление рабочей жидкости. На насосных станциях в осенние и зимние месяцы часть рабочих насосов отключается для производства ремонтных и профилактических работ и также уменьшается давление рабочей жидкости. Снижение давления на гидроэлектростанциях может достигать 20 %, а на насосных станциях — 15 %. При его уменьшении снижается скорость истечения жидкости из сопла струйного насоса, резко падает его КПД. При определенных условиях созда-