

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАГРЕВАНИИ СТЕРЖНЯ

Канд. физ.-мат. наук, доц. ЛАСЫЙ П. Г.,
докт. физ.-мат. наук, проф. МЕЛЕШКО И. Н.

Белорусский национальный технический университет

Рассмотрим задачу о распределении температуры в тонком, однородном, теплоизолированном стержне конечной длины, внутри которого находятся постоянно действующие источники теплоизлучения, а начальная и граничная температуры равны нулю.

Математической моделью этой задачи является неоднородное одномерное уравнение теплопроводности

$$\partial_t T = a^2 \partial_{xx} T + q(x, t), \quad (1)$$

где $T = T(x, t)$ – температура стержня длиной $l > 0$ в точке $x \in [0, l]$ в момент времени $t \geq 0$; a^2 – физическая постоянная (коэффициент теплопроводности), характеризующая теплопроводность материала, из которого изготовлен стержень; $q(x, t)$ – мощность источника теплоизлучения с точностью до постоянного множителя.

Функцию $q(x, t)$ будем предполагать кусочно-монотонной по аргументу t на любом конечном отрезке равномерно по всем $x \in [0, l]$ и удовлетворяющей условию Липшица, т. е. существует константа $L > 0$ такая, что для всех $x_1, x_2 \in [0, l]$ и $t_1, t_2 \geq 0$ выполняется неравенство

$$|q(x_1, t_1) - q(x_2, t_2)| \leq L(|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|).$$

В начальный момент времени и на концах стержня температура равна нулю, т. е.

$$T(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l] \quad (2)$$

и

$$T(0, t) = T(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Благодаря условию Липшица решение смешанной задачи (2), (3) для уравнения (1) может быть представлено в виде равномерно сходящегося на отрезке $[0, l]$ и любом конечном промежутке временной оси ряда [1, с. 552]

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t \exp(-\alpha k^2 s) q_k(t-s) ds \right) \sin k\omega x, \quad (4)$$

где $\omega = \frac{\pi}{l}$, $\alpha = (a\omega)^2$; $q_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l q(y, t) \sin k\omega y dy$; $k \in N$ – коэффициенты разложения в ряд Фурье по синусам функции $q(x, t)$ на отрезке $[0, l]$.

Приближенное вычисление температуры стержня по формуле (4) связано с большими трудностями, так как приходится вычислять коэффициенты ряда Фурье для функции $q(x, t)$, да и общая оценка допускаемой погрешности весьма затруднительна. В настоящей работе предлагается другой способ решения этой задачи, основанный на представлении температуры с помощью специальной функции, являющейся быстро сходящимся степенным рядом с экспоненциальными по времени коэффициентами. Речь идет о пси-функции [2]

$$\Psi_r(\lambda, t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\lambda k^2 t) k^{-r} z^k, \quad (5)$$

зависящей от действительных переменных $r, \lambda > 0, t \geq 0$ и комплексного аргумента z .

На единичной окружности $z = \exp(i\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Psi_r(\lambda, t, \exp(i\varphi)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\lambda k^2 t) k^{-r} \cos k\varphi; \\ \operatorname{Im} \Psi_r(\lambda, t, \exp(i\varphi)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\lambda k^2 t) k^{-r} \sin k\varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

Найдем представление решения (4) поставленной выше смешанной задачи через пси-функцию (5). В самом деле:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t \exp(-\alpha k^2 s) \left(\frac{2}{l} \int_0^l q(y, t-s) \sin k\omega y dy \right) ds \right) \sin k\omega x = \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l dy \int_0^t q(y, t-s) \times \\ &\times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\alpha k^2 s) \cos k\omega(y-x) - \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\alpha k^2 s) \cos k\omega(y+x) \right) ds, \end{aligned}$$

откуда ввиду первой из формул (6)

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{l} \int_0^l dy \int_0^t q(y, t-s) \operatorname{Re} \times \\ &\times (\Psi_0(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x))) - \Psi_0(\alpha, s, \exp(i\omega(y+x)))) ds. \end{aligned} \quad (7)$$

Займемся приближенным вычислением температуры (7). Зафиксируем $t > 0$ и разобьем прямоугольник $[0, l] \times [0, t]$ прямыми:

$$x = x_m = mh, \quad m = \overline{0, m_1}, \quad h = \frac{l}{m_1}; \quad t = t_n = n\tau, \quad n = \overline{0, n_1}, \quad \tau = \frac{t}{n_1}$$

на $m_1 n_1$ прямоугольников и заменим под знаком интеграла в правой части формулы (7) в каждом из прямоугольников $[x_{m-1}, x_m] \times [t_{n-1}, t_n]$, $m = \overline{1, m_1}$,

$n = \overline{1, n_1}$ функцию $q(y, t - s)$ ее значением в средней точке прямоугольника. В результате, используя формулы (6), после несложного интегрирования получим:

$$\begin{aligned} T(x, t) &\approx \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} \int_{x_{m-1}}^{x_m} dy \int_{t_{n-1}}^{t_n} q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t - t_{n-1} - \frac{\tau}{2}\right) \times \\ &\times \operatorname{Re}\left(\Psi_0(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x))) - \Psi_0(\alpha, s, \exp(i\omega(y+x)))\right) ds = \\ &= \frac{1}{\alpha\pi} \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t - t_{n-1} - \frac{\tau}{2}\right) \times \\ &\times \operatorname{Im}\left(\Psi_3(\alpha, s, \exp(i\omega(y+x))) - \Psi_3(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x)))\right) \Big|_{t_{n-1}}^{t_n} \Big|_{m-1}^{x_m}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли следующую формулу для приближенного вычисления решения смешанной задачи (1)–(3)

$$\begin{aligned} T(x, t) &\approx T_{m_1 n_1}(x, t) = \\ &= \frac{1}{\alpha\pi} \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t - t_{n-1} - \frac{\tau}{2}\right) \times \\ &\times \operatorname{Im}\left(\Psi_3(\alpha, s, \exp(i\omega(y+x))) - \Psi_3(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x)))\right) \Big|_{t_{n-1}}^{t_n} \Big|_{m-1}^{x_m}. \quad (8) \end{aligned}$$

Прежде чем вычислить погрешность формулы (8), найдем одну полезную оценку для пси-функции $\Psi_2(\alpha, t, \exp(i\omega x))$.

Зафиксируем $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и обозначим

$$a_k(t, s) = \frac{1 - \exp(-\alpha k^2(t-s))}{k^{2\gamma}}; \quad b_k(x, s) = \frac{\exp(-\alpha k^2 s) \cos k\omega x}{k^{2-2\gamma}}, \quad k \in N.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Psi_2(\alpha, z, \exp(i\omega x)) \Big|_s^t &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha k^2 t) - \exp(-\alpha k^2 s)}{k^2} \cos k\omega x = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t, s) b_k(x, s) \quad (9) \end{aligned}$$

и при всех $t \geq s \geq 0$, $x \in R$ ряд (9) сходится равномерно и имеет место неравенство

$$\left| \operatorname{Re} \Psi_2(\alpha, z, \exp(i\omega x)) \Big|_s^t \right| \leq \frac{4(1-\gamma)}{1-2\gamma} \left(\frac{2\alpha}{5\gamma} \right)^{\gamma} (t-s)^{\gamma}. \quad (10)$$

Для доказательства рассмотрим неотрицательную функцию

$$\varphi_k(y) = \frac{1 - \exp(-\alpha k^2 y)}{k^{2\gamma}}, \quad k \in N, \quad y \geq 0.$$

Очевидно, $\varphi_k(y) \leq \frac{1}{k^{2\gamma}}$ и, значит:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(y) = 0 \text{ равномерно по } y \geq 0. \quad (11)$$

Далее, обозначив $\alpha k^2 y = v$, получим:

$$\varphi_k(y) = \alpha^\gamma \chi(v) y^\gamma; \chi(v) = \frac{1 - \exp(-v)}{v^\gamma}. \quad (12)$$

Производная функции $\chi(v)$ равна $\chi'(v) = \frac{v + \gamma - \gamma \exp v}{v^{\gamma+1} \exp v}$, и поскольку $\chi'\left(\frac{5\gamma}{2}\right) > 0$, а $\chi'\left(\frac{2(1-\gamma)}{\gamma}\right) < 0$, то единственная точка максимума v_0 данной функции принадлежит интервалу $\left(\frac{5\gamma}{2}, \frac{2(1-\gamma)}{\gamma}\right)$. Тогда $\chi(v) < \left(\frac{2}{5\gamma}\right)^\gamma$, $v \geq 0$ и, как следует из (12):

$$\varphi_k(y) \leq \left(\frac{2\alpha}{5\gamma}\right)^\gamma y^\gamma, k \in N, y \geq 0.$$

Так как $a_k(t, s) = \varphi_k(t - s)$, $k \in N$, то

$$a_k(t, s) \leq \left(\frac{2\alpha}{5\gamma}\right)^\gamma (t - s)^\gamma, k \in N. \quad (13)$$

Из приведенного выше исследования функции $\chi(v)$ и (12) следует, что при фиксированных t и s последовательность $a_k(t, s)$, $k \in N$ возрастает, если $\alpha k^2(t - s) \leq v_0$, и убывает, если $\alpha k^2(t - s) > v_0$. Благодаря же (11) эта последовательность равномерно бесконечно мала при всех $t \geq s \geq 0$.

Поскольку

$$|b_k(x, s)| = \left| \frac{\exp(-\alpha k^2 s) \cos k\omega x}{k^{2-2\gamma}} \right| \leq \frac{1}{k^{2-2\gamma}}, k \in N,$$

то при любом натуральном n и $x \in R$, $s \geq 0$

$$|B_n(x, s)| = \left| \sum_{k=1}^n b_k(x, s) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2-2\gamma}} \leq 1 + \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2-2\gamma}} = \frac{2(1-\gamma)}{1-2\gamma}. \quad (14)$$

Учитывая (14) и свойства последовательности $a_k(t, s)$, $k \in N$, установленные выше, мы можем утверждать, что ряд (9) сходится равномерно при $t \geq s \geq 0$ и $x \in R$ по признаку Дирихле [3, с. 432].

Для доказательства оценки (10) применим преобразование Абеля [3, с. 307] к частичной сумме ряда (9)

$$\sum_{k=1}^n a_k(t, s) b_k(x, s) = a_n(t, s) B_n(x, s) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(t, s) - a_{k+1}(t, s)) B_k(x, s).$$

Отсюда, используя (14), получаем

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k(t, s) b_k(x, s) \right| \leq \frac{2(1-\gamma)}{1-2\gamma} \left(a_n(t, s) + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k(t, s) - a_{k+1}(t, s)| \right).$$

Обозначим через k_0 максимальное из натуральных чисел k , для которых $\alpha k^2(t-s) \leq v_0$. Тогда, раскрыв модули в предыдущем неравенстве, можем переписать его в виде

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n a_k(t, s) b_k(x, s) \right| \leq \\ & \leq \frac{2(1-\gamma)}{1-2\gamma} \left(a_{k_0}(t, s) + a_{k_0+1}(t, s) + |a_{k_0}(t, s) - a_{k_0+1}(t, s)| - a_1(t, s) \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k(t, s) b_k(x, s) \right| \leq \frac{4(1-\gamma)}{1-2\gamma} \max\{a_{k_0}(t, s), a_{k_0+1}(t, s)\}$$

и, следовательно, ввиду (13) $\left| \sum_{k=1}^n a_k(t, s) b_k(x, s) \right| \leq \frac{4(1-\gamma)}{1-2\gamma} \left(\frac{2\alpha}{5\gamma} \right)^\gamma (t-s)^\gamma$,

что при $n \rightarrow \infty$ и доказывает (10).

Займемся теперь оценкой погрешности формулы (8). Эта погрешность представляется в виде

$$T(x, t) - T_{m_1 n_1}(x, t) = \frac{1}{\alpha l} \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} (I_{mn}^{(1)} - I_{mn}^{(2)}),$$

где

$$\begin{aligned} I_{mn}^{(1)} &= \alpha \int_{x_{m-1}}^{x_m} dy \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(q(y, t-s) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t - t_{n-1} - \frac{\tau}{2}\right) \right) \times \\ & \quad \times \operatorname{Re} \Psi_0(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x))) ds; \\ I_{mn}^{(2)} &= \alpha \int_{x_{m-1}}^{x_m} dy \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(q(y, t-s) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t - t_{n-1} - \frac{\tau}{2}\right) \right) \times \\ & \quad \times \operatorname{Re} \Psi_0(\alpha, s, \exp(i\omega(y+x))) ds. \end{aligned}$$

Для интеграла $I_{mn}^{(1)}$ используем сначала вторую теорему о среднем значении [3, с. 119] по аргументу s , разбив, если потребуется, отрезок $[t_{n-1}, t_n]$

на части, внутри каждой из которых функция $q(y, t-s)$ монотонна. Для простоты предположим, что эта функция монотонна на всем отрезке $[t_{n-1}, t_n]$. В результате после интегрирования мы получим:

$$\begin{aligned}
I_{mn}^{(1)} &= \alpha \int_{x_{m-1}}^{x_m} \left(\left(q(y, t-t_{n-1}) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t-t_{n-1} - \frac{\tau}{2}\right) \right) \times \right. \\
&\quad \times \int_{t_{n-1}}^{s_n} \operatorname{Re} \Psi_0(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x))) ds + \\
&\quad \left. + \left(q(y, t-t_n) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t-t_{n-1} - \frac{\tau}{2}\right) \right) \int_{s_n}^{t_n} \operatorname{Re} \Psi_0(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x))) ds \right) dy = \\
&= - \int_{x_{m-1}}^{x_m} \left(\left(q(y, t-t_{n-1}) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t-t_{n-1} - \frac{\tau}{2}\right) \right) \operatorname{Re} \Psi_2(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x))) \Big|_{t_{n-1}}^{s_n} + \right. \\
&\quad \left. + \left(q(y, t-t_n) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t-t_{n-1} - \frac{\tau}{2}\right) \right) \operatorname{Re} \Psi_2(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x))) \Big|_{s_n}^{t_n} \right) dy,
\end{aligned}$$

где $s_n \in [t_{n-1}, t_n]$.

Применяя к последнему интегралу теорему о среднем значении, найдем:

$$\begin{aligned}
I_{mn}^{(1)} &= - \left(\left(q(y_m, t-t_{n-1}) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t-t_{n-1} - \frac{\tau}{2}\right) \right) \times \right. \\
&\quad \times \operatorname{Re} \Psi_2(\alpha, s, \exp(i\omega(y_m-x))) \Big|_{t_{n-1}}^{s_n} + \\
&\quad \left. + \left(q(y_m, t-t_n) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t-t_{n-1} - \frac{\tau}{2}\right) \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \operatorname{Re} \Psi_2(\alpha, s, \exp(i\omega(y_m-x))) \Big|_{s_n}^{t_n} \right) h, \quad y_m \in [x_{m-1}, x_m].
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая липшицевость функции $q(x, t)$ и неравенство (10), получим:

$$\begin{aligned}
|I_{mn}^{(1)}| &\leq \left| q(y_m, t-t_{n-1}) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t-t_{n-1} - \frac{\tau}{2}\right) \right| \left| \operatorname{Re} \Psi_2(\alpha, s, \exp(i\omega(y_m-x))) \Big|_{t_{n-1}}^{s_n} \right| + \\
&\quad + \left| q(y_m, t-t_n) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t-t_{n-1} - \frac{\tau}{2}\right) \right| \left| \operatorname{Re} \Psi_2(\alpha, s, \exp(i\omega(y_m-x))) \Big|_{s_n}^{t_n} \right| h \leq \\
&\leq L \left(\frac{h}{2} + \frac{\tau}{2} \right) \frac{4(1-\gamma)}{1-2\gamma} \left(\frac{2\alpha}{5\gamma} \right)^\gamma ((s_n - t_{n-1})^\gamma + (t_n - s_n)^\gamma) h \leq \frac{4(1-\gamma)}{1-2\gamma} \left(\frac{2\alpha}{5\gamma} \right)^\gamma L(h+\tau) h \tau^\gamma.
\end{aligned}$$

Совершенно аналогично:

$$|I_{mn}^{(2)}| \leq \frac{4(1-\gamma)}{1-2\gamma} \left(\frac{2\alpha}{5\gamma} \right)^\gamma L(h+\tau)h\tau^\gamma$$

и, следовательно:

$$\begin{aligned} |T(x, t) - T_{m_1 n_1}(x, t)| &= \frac{1}{\alpha l} \left| \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} (I_{mn}^{(1)} - I_{mn}^{(2)}) \right| \leq \frac{1}{\alpha l} \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} (|I_{mn}^{(1)}| + |I_{mn}^{(2)}|) \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha l} \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} \frac{8(1-\gamma)}{1-2\gamma} \left(\frac{2\alpha}{5\gamma} \right)^\gamma L(h+\tau)h\tau^\gamma = \frac{8(1-\gamma)}{\alpha^{1-\gamma}(1-2\gamma)} \left(\frac{2}{5\gamma} \right)^\gamma Lt(h+\tau)\tau^{\gamma-1}. \end{aligned}$$

Зафиксируем произвольное $\beta \in (0, 1)$. Тогда при $h \leq \tau^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}}$ из предыдущего неравенства вытекает равномерная по $x \in [0, l]$ оценка погрешности приближенного решения (8)

$$|T(x, t) - T_{m_1 n_1}(x, t)| \leq \frac{8(1-\gamma)}{\alpha^{1-\gamma}(1-2\gamma)} \left(\frac{2}{5\gamma} \right)^\gamma Lt(h^\beta + \tau^\gamma). \quad (15)$$

Все проведенные выше исследования позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема. При сделанных предположениях относительно функции $q(x, t)$ точное решение смешанной задачи (2), (3) для неоднородного уравнения теплопроводности (1) выражается через пси-функцию (5) по формуле (7), а приближенное – по формуле (8). Допускаемая при этом погрешность вычисления для произвольных фиксированных $t > 0$, $\beta \in (0, 1)$, $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ равномерно по $x \in [0, l]$ не превышает величины

$$\frac{8(1-\gamma)}{\alpha^{1-\gamma}(1-2\gamma)} \left(\frac{2}{5\gamma} \right)^\gamma Lt(h^\beta + \tau^\gamma),$$

где $h = \frac{l}{m_1}$; $\tau = \frac{t}{n_1}$; $h \leq \tau^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}}$ и, таким образом, имеет порядок $O(h^\beta + \tau^\gamma)$.

Пример. Рассмотрим смешанную задачу (2), (3) для уравнения теплопроводности

$$\partial_t T = \partial_{xx} T + (x - x^2 + 2t) \sin(2xt) - 2t^2(1-x) \cos(2xt), \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0.$$

Точным решением этой задачи является функция

$$T(x, t) = (1-x) \sin^2(xt).$$

Тестирование приближенного решения этой задачи по формуле (8), проведенное в среде компьютерной алгебры Mathematica, показало, что уже при $m_1 = 50$, $n_1 = 150$ во всех внутренних узлах сетки $x_k = 0,1k$,

$k = \overline{0,1} \cap t_j = j, j = \overline{0,1}$ точное решение отличается от приближенного по абсолютной величине меньше, чем на 10^{-2} .

ВЫВОД

С помощью специальной пси-функции найдено точное и приближенное представления решения однородной смешанной задачи для неоднородного одномерного уравнения теплопроводности. Приведена также оценка погрешности приближенного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы е уравнения математической физики / Н. С. Кошляков [и др.]. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 767 с.
2. Л а с ы й, П. Г. Приближенное представление решения одной смешанной задачи теории теплопроводности с помощью специальных функций / П. Г. Ласый, И. Н. Мелешко // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2009. – № 1. – С. 53–58.
3. Ф и х т е н г о л ь ц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – М.: ГИФМЛ, 1962. – Т. 2. – 807 с.

Представлена кафедрой
высшей математики № 2

Поступила 21.11.2012

УДК 621.57+620.97

ТЕПЛОВОЙ РАСЧЕТ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ГРУНТОВЫХ ТЕПЛООБМЕННИКОВ

Асп. ФИЛАТОВ С. О.

Белорусский государственный технологический университет

В последнее время за рубежом все большее развитие получает направление в нетрадиционной энергетике, основанное на утилизации низкопотенциальной теплоты грунта [1–4]. В большинстве случаев такие системы включают в себя один или несколько вертикальных грунтовых теплообменников (ВГТО), работающих совместно с тепловым насосом (ТН). При этом ВГТО соединен с испарителем ТН. В качестве ВГТО могут быть использованы коаксиальные (рис. 1а), U-образные ВГТО с одной (рис. 1б) или несколькими трубами (рис. 1в, г, е), а также ВГТО с каналами более сложной формы [5] (рис. 1д). Кроме того, известен частный случай ВГТО – энергосваи, представляющие собой строительные сваи с трубами теплообменника, по которым циркулирует промежуточный теплоноситель (рис. 1е).