DOI: 10.21122/1029-7448-2017-60-4-334-340

УДК 517.958:519.6

Приближенное решение одной задачи об электрических колебаниях в проводах с помощью полилогарифмов

П. Г. Ласый[1], И. Н. Мелешко[1]

[1]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. В статье рассматривается смешанная задача с однородными краевыми условиями для одномерного однородного волнового уравнения. Такая задача может возникнуть, например, при изучении колебаний силы тока и напряжения в проводнике, по которому проходит электрический ток, и линия свободна от искажения. Решение можно найти методом Фурье в виде тригонометрического ряда. Данное представление имеет только теоретический интерес, поскольку для реального вычисления необходимо, во-первых, находить большое число коэффициентов-интегралов, что само по себе – задача нетривиальная и, во-вторых, практически невозможно провести оценку погрешности вычислений. Предлагается альтернативный способ решения этой задачи, основанный на использовании трансцендентных функций – полилогарифмов, которые представляют собой комплексные степенные ряды специального вида. Точное решение задачи выражается через мнимую часть полилогарифма первого порядка на единичной окружности, а приближенное – через действительную часть дилогарифма. Кроме того, если начальные условия в задаче являются элементарными функциями, то и решение также осуществляется через элементарные функции. Найдена простая и вместе с тем эффективная оценка погрешности приближенного решения задачи. Она не зависит от времени и имеет первый порядок точности относительно шага разбиения отрезка числовой оси, на котором рассматривается задача. Указанная оценка является равномерной относительно переменных задачи – как пространственной, так и временнóй.

Ключевые слова: электрические колебания, решение задачи, трансцендентные функции, оценка погрешности, полилогарифм

Для цитирования: Ласый, П. Г. Приближенное решение одной задачи об электрических колебаниях в проводах с помощью полилогарифмов / П. Г. Ласый, И. Н. Мелешко // *Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ.* 2017. Т. 60. № 4. С. 334–340. DOI: 10.21122/1029-7448-2017-60-4-334-340

Approximate Solution of One Problem on Electrical Oscillations in Wires with the Use of Polylogarithms

P. G. Lasy[1], I. N. Meleshko[1]

[1]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The article considers a mixed problem with homogeneous boundary conditions for one-dimensional homogeneous wave equation. Such a problem can arise, for example, when studying

Адрес для переписки	**Address for correspondence**
Ласый Петр Григорьевич	Lasy Petr G.
Белорусский национальный технический университет	Belarusian National Technical University
ул. Я. Коласа, 12,	12 Ya. Kolasa str.,
220013, г. Минск, Республика Беларусь	220013, Minsk, Republic of Belarus
Тел.: +375 17 292-82-73	Tel.: +375 17 292-82-73
kafvm2@bntu.by	kafvm2@bntu.by

oscillations of current and voltage in the conductor through which electric current flows, while the line is free from distortion. The solution can be found with the use of the Fourier method in the form of trigonometric series. This representation is of purely theoretical interest, because the real calculation should be, first, to find a large number of coefficients of the integrals, which in itself is not a trivial task and, second, it is almost impossible to assess the error of the calculations. An alternative way of solving this problem based on the use of transcendental functions i. e. polylogarithms that represent complex power series of a special kind. The exact solution of the problem is expressed through the imaginary part of a polylogarithm of the first order on the single circle and the approximate one – via the real part of the dilogarithm. In addition, if the initial conditions in the problem are elementary functions, then the solution is also computed using elementary functions. A simple and effective error estimate of the approximate solution has been found. It does not depend on time and it has the first-order of accuracy regarding the step of a partitioning segment of the numerical axis on which the problem is considered. This valuation is uniform with respect to the variables of the problem – both spatial and temporal.

Keywords: electric oscillations, solution of the problem, transcendental functions, error estimate, polylogarithm

For citation: Lasy P. G., Meleshko I. N. (2017) Approximate Solution of One Problem on Electrical Oscillations in Wires with the Use of Polylogarithms. *Energetika. Proc. CIS Higher Educ. Inst. and Power Eng. Assoc.* 60 (4), 334–340. DOI: 10.21122/1029-7448-2017-60-4-334-340 (in Russian)

Колебания силы тока и напряжения при прохождении по проводу длиной $l > 0$ электрического тока удовлетворяют телеграфному уравнению

$$\partial_{xx} w = a_0 \partial_{tt} w + 2b_0 \partial_t w + c_0 w, \tag{1}$$

где $w = w(x,t)$ – неизвестная функция переменных $0 \le x \le l$ и $t \ge 0$; $t \ge 0$, a_0, b_0, c_0 – положительные постоянные [1–5].

Другие приложения уравнения (1) можно найти, например, в [6–8]. После замены в (1) искомой функции по формуле

$$w = e^{-\frac{b_0}{a_0}t} u$$

получим следующее линейное уравнение в частных производных:

$$\partial_{tt} u = a^2 \partial_{xx} u + b^2 u,$$

где $a = \dfrac{1}{\sqrt{a_0}}$; $b = \dfrac{\sqrt{b_0^2 - a_0 c_0}}{a_0}$.

В линии, свободной от искажения, $b = 0$, и приведенное выше выражение принимает вид

$$\partial_{tt} u = a^2 \partial_{xx} u. \tag{2}$$

То есть (2) является одномерным однородным волновым уравнением. Рассмотрим смешанную задачу для (2) с заданными начальными условиями:

$$u(x,0) = f(x); \quad \partial_t u(x,0) = F(x); \quad 0 \le x \le l \tag{3}$$

и постоянными краевыми условиями, которые для удобства будем считать однородными:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0;\ \ t \ge 0. \tag{4}$$

Это не является ограничением общности, так как в случае неоднородных условий:

$$u(0,t) = u_0;\ \ u(l,t) = u_l;\ \ t \ge 0,$$

где u_0, u_l – действительные числа, заменой искомой функции

$$u = v + \frac{u_l - u_0}{l}x + u_0$$

можно свести данную задачу к аналогичной относительно новой неизвестной функции v, но уже с однородными краевыми условиями.

Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[0, l]$, а ее производная $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L_1 > 0$, т. е. для любых $(x_1, x_2) \in [0, l]$ выполняется неравенство

$$\left| f'(x_1) - f'(x_2) \right| \le L_1 \left| x_1 - x_2 \right|.$$

Функцию $F(x)$ на отрезке $[0, l]$ будем предполагать кусочно-монотонной и удовлетворяющей условию Липшица с константой $L_2 > 0$. Тогда существует единственно обобщенное решение смешанной задачи (2)–(4) [1, с. 144], которое представляется рядом

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega at + b_k \sin k\omega at \right) \sin k\omega x, \tag{5}$$

где $\omega = \pi/l$, и при любом натуральном k:

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(s) \sin k\omega s\, ds;\ \ b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(s) \sin k\omega s\, ds. \tag{6}$$

Формула (5) малопригодна для приближенного вычисления решения, так как необходимо находить коэффициенты-интегралы (6), да и не существует общей оценки погрешности. Авторы статьи предлагают более эффективный метод решения этой задачи, основанный на использовании полилогарифмов [9, 10]. В дальнейшем будем использовать мнимую часть полилогарифма первого порядка на единичной окружности

$$N^1(x) = \operatorname{Im} L^1(e^{ix}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k},\ \ x \in \boldsymbol{R}, \tag{7}$$

и там же действительную часть дилогарифма

$$M^2(x) = \operatorname{Re} L^2(e^{ix}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2},\ x \in \boldsymbol{R}. \tag{8}$$

При $x \in [-\pi, \pi]$ эти периодические функции задаются выражениями:

$$N^1(x)=\frac{1}{2}(\pi\,\mathrm{sgn}(x)-x);\quad M^2(x)=\frac{\left(\pi-|x|\right)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12},\tag{9}$$

где $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|},\ x\neq 0;\\ 0,\ x=0\end{cases}$ – функция знака.

Выполнив в первом из интегралов (6) интегрирование по частям и учитывая, что $f(0) = f(l) = 0$, получим

$$a_k=\frac{2}{k\pi}\int_0^l f'(s)\cos k\omega s\,ds.$$

Используя это выражение для коэффициентов a_k и b_k (6), после подстановки их в (5), несложных преобразований и, принимая во внимание (7), найдем следующее представление для искомой функции:

$$\begin{aligned}u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^l\Bigg(&\left(f'(s)+\frac{1}{a}F(s)\right)\left(N^1(\omega(x-s+at))+N^1(\omega(x+s-at))\right)+\\&+\left(f'(s)-\frac{1}{a}F(s)\right)\left(N^1(\omega(x-s-at))+N^1(\omega(x+s+at))\right)\Bigg)ds.\end{aligned}\tag{10}$$

Теперь выполним приближенное вычисление функции $u(x, t)$. Разобьем отрезок $[0, l]$ на n равных частей точками $x_k=kh,\ k=\overline{0,n}$ (где $h = l/n$ – шаг разбиения) и заменим под знаком интеграла в правой части формулы (10) на каждом из частичных отрезков $\left[x_{k-1},x_k\right],\ k=\overline{1,n}$ функции $f'(x)$ и $F(x)$ ее значениями в средней точке отрезка. В результате, учитывая, что первообразной функции $N^1(x)$ является, очевидно, функция $-M^2(x),$ получим:

$$\begin{aligned}u(x,t)\approx\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}\Bigg(&\left(f'\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{a}F\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\right)\left(N^1(\omega(x-s+at))+N^1(\omega(x+s-at))\right)+\\&+\left(f'\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)-\frac{1}{a}F\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\right)\left(N^1(\omega(x-s-at))+N^1(\omega(x+s+at))\right)\Bigg)ds=\\=\frac{l}{2\pi^2}\sum_{k=1}^n\Bigg(&\left(f'\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{a}F\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\right)\left(M^2(\omega(x-s+at))-M^2(\omega(x+s-at))\right)+\\&+\left(f'\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)-\frac{1}{a}F\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\right)\left(M^2(\omega(x-s-at))-M^2(\omega(x+s+at))\right)\Bigg)\Bigg|_{x_{k-1}}^{x_k}.\end{aligned}$$

Таким образом, приближенным решением задачи (2)–(4) является функция

$$u_n(x,t) = \frac{l}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\Bigg(\left(f'\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{a}F\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\right)\times$$

$$\times\left(M^2(\omega(x-s+at))-M^2(\omega(x+s-at))\right)+ \tag{11}$$

$$+\left(f'\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)-\frac{1}{a}F\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\right)\left(M^2(\omega(x-s-at))-M^2(\omega(x+s+at))\right)\Bigg)\Bigg|_{x_{k-1}}^{x_k}.$$

Найдем оценку допускаемой при вычислении решения по формуле (11) погрешности, принимая во внимание, что

$$u(x,t)-u_n(x,t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\Bigg(\left(f'(s)-f'\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{a}\left(F(s)-F\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\right)\right)\times$$

$$\times\left(N^1(\omega(x-s+at))+N^1(\omega(x+s-at))\right)+$$

$$+\left(f'(s)-f'\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)-\frac{1}{a}\left(F(s)-F\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\right)\right)\times$$

$$\times\left(N^1(\omega(x-s-at))+N^1(\omega(x+s+at))\right)\Bigg)ds.$$

Тогда, учитывая липшициевость функций $f'(x)$ и $F(x)$, а также тот факт, что ввиду (9)

$$\left|N^1(x)\right| < \frac{\pi}{2},$$

получим

$$\left|u(x,t)-u_n(x,t)\right| \le \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\Bigg(\left(\left|f'(s)-f'\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\right|+\frac{1}{a}\left|F(s)-F\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\right|\right)\times$$

$$\times\left(\left|N^1(\omega(x-s+at))\right|+\left|N^1(\omega(x+s-at))\right|\right)+$$

$$+\left(\left|f'(s)-f'\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\right|+\frac{1}{a}\left|F(s)-F\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\right|\right)\times$$

$$\times\left(\left|N^1(\omega(x-s-at))\right|+\left|N^1(\omega(x+s+at))\right|\right)\Bigg)ds \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}2\left(L_1\left|s-x_{k-1}-\frac{h}{2}\right|+\frac{1}{a}L_2\left|s-x_{k-1}-\frac{h}{2}\right|\right)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)ds \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(L_1\frac{h}{2}+\frac{1}{a}L_2\frac{h}{2}\right)ds = \frac{l\left(aL_1+L_2\right)}{2a}h.$$

Следовательно, равномерно по $x \in [0, l]$ и $t \geq 0$

$$|u(x,t) - u_n(x,t)| \leq \frac{l(aL_1 + L_2)}{2a} h. \tag{12}$$

Проведенные выше исследования позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема. *При сделанных выше предположениях относительно функций* $f(x)$ *и* $F(x)$ *точное решение смешанной задачи* (2)–(4) *для однородного волнового уравнения представляется через мнимую часть полилогарифма первого порядка на единичной окружности* (7) *по формуле* (10), *а приближенное решение находится через действительную часть дилогарифма* (8) *по* (11). *Абсолютная погрешность вычислений оценивается по* (12), *т. е. она равномерна по* $x \in [0, l]$, $t \geq 0$ *и имеет первый порядок малости относительно шага разбиения* h.

Пример. Найти приближенное решение следующей смешанной задачи:

$$\partial_{tt} u = 4 \partial_{xx} u;$$
$$u(x,0) = sh \sin 2\pi x; \ \ \partial_t u(x,0) = -4\pi \cos 2\pi x \, sh \sin 2\pi x; \ \ 0 \leq x \leq 1;$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0; \ \ t \geq 0.$$

Непосредственной проверкой мы можем убедиться в том, что точным решением этой задачи является функция

$$u(x,t) = e^{-\sin 4\pi t \cos 2\pi x} sh(\sin 2\pi x \cos 4\pi t).$$

Вычисление значений приближенного решения данной задачи по формуле (11) в узлах сетки $(x_k, \ t_j)$; $k, \ j = \overline{0,10}$ (где $x_k = 0,1k$; $t_j = 0,1j$) показывает, что уже при $n = 50$ абсолютная погрешность меньше 0,002. Графики точного $u(x, t)$ и приближенного $u_{50}(x, t)$ решений данной задачи в квадрате $0 \leq x, t \leq 1$ представлены на рис. 1.

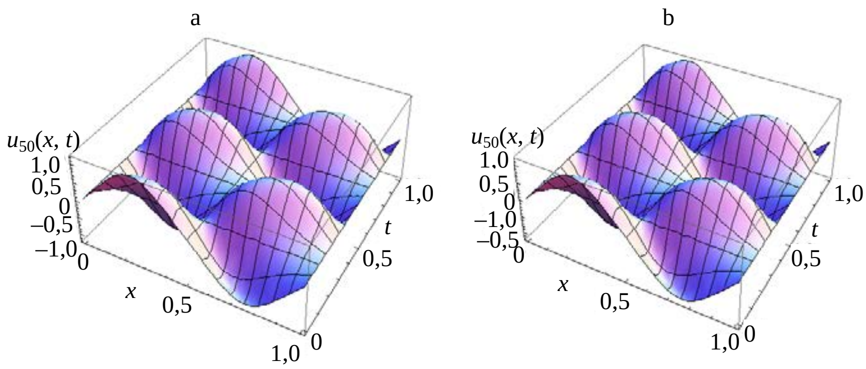

Рис. 1. График решений: a – точного $u(x, t)$; b – приближенного $u_{50}(x, t)$

Fig. 1. The graphs of the decisions: a – exact one $u(x, t)$; b – approximate one $u_{50}(x, t)$

ВЫВОД

С помощью полилогарифмов найдено точное и приближенное представления решений задачи об электрических колебаниях в линии, свободной от искажения. Приведена эффективная равномерная оценка погрешности приближенного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошляков, Н. С. Дифференциальные уравнения математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. М.: Физматгиз, 1962. 767 с.
2. Араманович, И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. М.: Наука, 1969. 288 с.
3. Смирнов, В. И. Курс высшей математики: в 2 т. / В. И. Смирнов. М.: Наука, 1974. Т. 2. 479 с.
4. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. СПб.: Лань, 2007. 688 с.
5. Остапенко, В. Телеграфное уравнение. Краевые задачи / В. Остапенко. Саарбрюккен: LAP Lambert Academic Publishing, 2012. 272 с.
6. Новиков, Ю. Н. Электротехника и электроника. Теория цепей и сигналов, методы анализа / Ю. Н. Новиков. СПб.: Питер, 2005. 384 с.
7. Бычков, Ю. А. Основы теории электрических цепей / Ю. А. Бычков, В. М. Золотницкий, Э. П. Чернышев. СПб.: Лань, 2002. 464 с.
8. Дубнищев, Ю. Н. Колебания и волны / Ю. Н. Дубнищев. СПб.: Лань, 2011. 384 с.
9. Пыхтеев, Г. Н. Полилогарифмы, их свойства и методы вычисления / Г. Н. Пыхтеев, И. Н. Мелешко. Минск: Изд-во БГУ, 1976. 68 с.
10. Мелешко, И. Н. Специальные формулы для интегралов типа Коши и их приложения / И. Н. Мелешко. Минск: ВУЗ-ЮНИТИ, 1999. 197 с.

Поступила 28.10.2016 Подписана в печать 07.01.2017 Опубликована онлайн 28.07.2017

REFERENCES

1. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. (1962) *Differential Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Fizmatgiz Publ. 767 (in Russian).
2. Aramanovich I. G., Levin V. I. (1969) *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Nauka Publ. 288 (in Russian).
3. Smirnov V. I. (1974) *A Course of Higher Mathematics. Vol. 2.* Moscow, Nauka Publ. 479 (in Russian).
4. Myshkis A. D. (2007) *Lectures in Higher Mathematics*. St.-Petersburg, Lan’ Publ. 688 (in Russian).
5. Ostapenko V. (2012) *Telegraph Equation. Boundary Value Problems.* Saarbrucken, LAP Lambert Academic Publishing. 272 (in Russian).
6. Novikov Yu. N. (2005) *Electrical Engineering and Electronics. Circuit and Signals Theory, Methods of Analysis*. St.-Petersburg, Piter Publ. 384 (in Russian).
7. Bychkov Yu. A., Zolotnickij V. M., Chernyshev Je. P. (2002) *Fundamentals of Electric Circuit Theory*. St.-Petersburg, Lan’ Publ. 464 (in Russian).
8. Dubnishchev Yu. N. (2011) *Oscillations and Waves*. St.-Petersburg, Lan’ Publ. 384 (in Russian).
9. Pykhteev G. N., Meleshko I. N. (1976) *Polylogarithms, their Properties and Calculation Method*. Minsk, Belarusian State University Publ. 68 (in Russian).
10. Meleshko I. N. (1999) *Special Formula for Integrals of Cauchy-Type Integrals and their Applications*. Minsk, VUZ-YuNITI Publ. 197 (in Russian).

Received: 28 October 2016 Accepted: 7 January 2017 Published online: 28 July 2017